

Elementi di Algoritmi e Strutture Dati
Testo della prova scritta del 02 febbraio 2009
docente: Luciano Gualà

Cognome:..... Nome:..... Matr.:..... Corso di Laurea:.....

Esercizio 1 [8 punti] Siano $f(n), g(n), h(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tre funzioni. Dimostrare o confutare le seguenti due relazioni:

- (a) $\max\{\min\{f(n), g(n)\}, \min\{f(n), h(n)\}\} = O(f(n))$.
- (b) $\max\{\min\{f(n), g(n)\}, \min\{f(n), h(n)\}\} = O(\min\{g(n), h(n)\})$.

Esercizio 2 [8 punti] Sia A una matrice $n \times m$. Diciamo che A gode della proprietà di *ordinamento di Young* se gli elementi di ogni riga sono ordinati (in ordine non decrescente) da sinistra verso destra e gli elementi di ogni colonna sono ordinati (in ordine non decrescente) dall'alto verso il basso, ovvero per ogni $1 \leq i < n$ e $1 \leq j < m$, si ha che $A[i, j] \leq A[i + 1, j]$ e $A[i, j] \leq A[i, j + 1]$. Un esempio per $n = 4$ e $m = 3$ è il seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 20 \\ 5 & 14 & 22 \\ 8 & 21 & 22 \\ 15 & 23 & 30 \end{pmatrix}$$

Realizzare un algoritmo che, preso in input una matrice A che rispetta la proprietà di ordinamento di Young in tutti gli elementi tranne nell'elemento $A[1, 1]$, riorganizza A in modo da ripristinare la proprietà su tutti gli elementi. *Attenzione:* l'esercizio sarà valutato solo se corredato da adeguata descrizione del funzionamento dell'algoritmo, in base ai seguenti parametri: correttezza, efficienza e analisi di complessità.

Esercizio 3 [8 punti]

- (a) A partire da un albero AVL vuoto, si mostrino le modifiche apportate all'albero in seguito ai seguenti inserimenti: 10, 7, 9, 17, 23. Si dica, motivando la risposta, se l'albero ottenuto è un albero di Fibonacci.
- (b) Per un problema sono noti due algoritmi ricorsivi, A e A' , le cui complessità temporali sono descritte dalle equazioni di ricorrenza $T(n) = T(n - 1) + O(1)$, $T(1) = 1$, e $T'(n) = kT'(n/3) + \sqrt{n}$, $T'(1) = 1$. Dire, motivando la risposta, per quali valori interi di k A è preferibile ad A' .

Esercizio 4 [8 punti] Si dia la definizione di Heap, poi si descriva la procedura di `Heapify` che, preso un vettore A di n elementi, trasforma A in un Heap. Si derivi in particolare la complessità temporale di `Heapify`.