ALGORITMI E STRUTTURE DATI
(II MODULO)
PROVA del 26/06/2019

Nome …………………… Cognome ……………………….. Matr. ……………………..

Esercizio I (Algoritmo di Prim per MST). Si consideri l'algortimo **ALG** di Prim per il calcolo del Minimum Spanning Tree (MST) per un grafo pesato **<G(V,E),w>,** con **V = {1,2,…,n}** (n>10), <u>non</u> connesso, a pesi ***w(e)*** tutti distinti e positivi. Si applichi **ALG** a partire dal nodo **v=2** e sia **T** l'albero generato da **ALG**. Si risponda alle seguenti domande:

1. L'albero **T** cosa è per **<G(V,E),w>?** **(3 punti)**
a) E' il suo MST, perché gli archi hanno tutti pesi distinti…………………….□
b) E' il MST ma solo per il *Vicinato* del nodo v, perché il grafo non è connesso e quindi **T** non può ricoprire tutti gli archi di **G** ………………………..………………□
c) E' il MST per la *Componente Connessa* **Cv** di **G** che contiene il nodo v, perché **Cv** è a sua volta un grafo pesato connesso …………..……………□

2. Quanto è grande **T?** (**2 punti)**
a) **T** ha dimensione *n-1* per definizione di Spanning Tree per **G** …………………….□
b) **T** ha dimensione |Cv|-1 perché è un albero ricoprente **Cv** ……………………….□
c) La dimensione di **T** dipende dal grado del nodo v … ……………..………………□

3. Si consideri il sottoinsieme **I** dei nodi visitati da **ALG** dopo esattamente *t>1* passi. Per dimostrare che **T** è un MST, quale dei seguenti passi induttivi bisogna applicare **(5 punti)**:
a) Si considera la bi-partizione *(I, Cv-I)* e si applica la CUT PROPERTY sull'insieme di archi *E(I,Cv-I).* …………………….□
b) Si aggiungono archi di peso **+∞** per rendere il grafo connesso e si applica la CYCLE PROPERTY a qualsiasi ciclo che contiene archi di peso **+∞** …………………….□
c) Si considera una combinazione tra il cut (bi-partizione) descritto nel punto (a) ed un qualsiasi ciclo descritto nel punto (b) e poi si applica la proprietà
CYCLE-CUT INTERSECTION …………………….□

Esercizio II (3-SAT et IND-SET). Si consideri la formula booleana **F(X1,…,X4)**

(X1 or X2 or X3) and (-X1 or -X2 or -X4) and (-X1 or X2 or X4) and (-X2 or -X3 or -X4)

e si risponda alle seguenti domande.

1. La Formula **F** è un'istanza per il problema 3-SAT? **(3 punti)**
a) NO, perché manca il parametro **k** e quindi non è un problema decisionale …………………….□
b) SI, perché **k** è implicitamente dato dal numero delle Clausole di **F** …………………… □
c) SI, perché, per definizione di istanza di 3-SAT, <u>non</u> c'è bisogno di alcun parametro **k** …………………..□

2. Dare qui sotto un certificato di 4 bits che mostri che **F** è soddisfacibile, specificando come questi 4 bits debbono essere interpretati (max 1 riga di spiegazione**):** **(2 punti)**

… … … … Spiegazione:

3. Se si è risposto SI al Quesito 1 di questo esercizio, si disegni l'istanza **<G(V,E);k>** del problema INDEPENDENT SET (IND-SET) corrispondente a **F(X1,…,X4)** mediante la nota riduzione 3-**SAT $<_p$ IND-SET,** si visualizzi l'Independent Set corrispondente al certificato scelto per il Quesito 2, e si determini il valore esatto del parametro **k (6 punti)**:

Esercizio III (Interval Scheduling). Si consideri il problema di massimizzazione INTERVAL SCHEDULING e si consideri l'algoritmo ottimale **GALG** basato su approccio *Greedy*.
Sia **X = <(S1,F1),(S2,F2),…,(Sn,Fn)>** la generica istanza di tale problema e si risponda alle seguenti domande:

1. Il criterio *Greedy* di **GALG** è basato su: **(3 punti)**
a) Ordinare in senso non-decrescente gli intervalli rispetto al finish time Fj
……….. □
b) Ordinare in senso non-decrescente gli intervalli rispetto al rapporto Fj/Sj
……….. □
c) Ordinare in senso non-decrescente gli intervalli rispetto al grado di incompatibilità degli intervalli
……….. □

2. Considerando la soluzione **I** prodotta da **GALG** e una soluzione ottima **J** per l'input **X**, si risponda alle seguenti domande: **(2 punti)**

2.1. Si definisca qui sotto correttamente cosa sono **I** e **J** rispetto ad **X** (si usi una notazione semplice e rigorosa – max 1 riga)

…………………………………………… …………………………………………..

2.2. Utilizzando 2.1, si descriva in modo semplice, completo e rigoroso l'enunciato tecnico relativo al generico passo induttivo ***r* >1** per dimostrare l'ottimalità di **GALG** (max 1 riga) **(5 punti)**

……………………………………………………………………………………………………