

**ALGORITMI E STRUTTURE DATI  
(II MODULO)  
PROVA SCRITTA del 19/02/2019**

**Esercizio 1 (Shortest Paths senza Heap)** Si consideri un grafo  $\langle G=(V,E); c:E \rightarrow \mathcal{R}^+ \rangle$  non diretto con pesi positivi e connesso ed un suo nodo  $s \in V$ . Sia  $|V| = n$  e  $|E| = m$ .

1. Si descriva rigorosamente mediante pseudo-codice **l'Algoritmo di Dijkstra** per il calcolo dei cammini minimi da  $s$  a tutti gli altri nodi del grafo (SPT) che utilizza un array non ordinato sia per la gestione della coda di priorità (non la struttura **Heap**) che per tutte le altre strutture dati. In particolare, si descriva con esattezza le operazioni di aggiornamento sulla coda di priorità assumendo note le procedure di *inserimento*, *estrazione max*, ed *aggiornamento chiave*
2. Si consideri il generico passo  $t > 0$  dell'algoritmo in cui viene estratto dalla coda di priorità un nodo  $v$  ed inserito nell'insieme  $S_t$  dei nodi visitati sino al passo  $t$ . Si risponda alle seguenti domande:
  - a. La distanza minima  $d(s,v)$  tra  $s$  e  $v$ , dopo il passo  $t$ , è stata definitivamente calcolata dall'algoritmo oppure potrebbe essere modificata in un passo successivo a  $t$ ? Motivare la risposta in modo rigoroso.
  - b. Ordinando in senso non decrescente i nodi rispetto alla distanza da  $s$ , il nodo  $v$  di cui sopra in che posizione ordinale si troverebbe? Motivare la risposta in modo rigoroso.
  - c. Analizzando la complessità dell'algoritmo sulla suddetta istanza, calcolare il numero massimo (worst-case) di operazioni di aggiornamento chiave che l'algoritmo dovrà operare sulla coda di priorità e calcolare quindi il costo complessivo dell'algoritmo relativo a questa specifica operazione tenendo conto della struttura dati utilizzata per la coda.
3. Il costo dello SPT dipende dalla scelta del nodo  $s$  oppure solamente dal grafo pesato  $\langle G=(V,E); c:E \rightarrow \mathcal{R}^+ \rangle$ ? Motivare con chiarezza la risposta.
4. Dare un upper bound ottimale per la complessità temporale dell'algoritmo proposto nel worst-case.

**Esercizio 2 (VERTEX COVER).** Si consideri il problema di ottimizzazione **MIN VERTEX COVER**. Si risponda alle seguenti domande.

1. Si definisca rigorosamente la versione decisionale specificando istanza e predicato logico.
2. Si dimostri che la versione decisionale è un problema appartenente alla classe NP.
3. Si progetti un algoritmo 2-approssimante per **MIN VERTEX COVER** che abbia complessità temporale polinomiale nella dimensione dell'istanza.