

**ALGORITMI E STRUTTURE DATI  
(II MODULO)  
PROVA del /07/2019**

Nome ..... Cognome ..... Matr. ....

**Esercizio I (Struttura Union-Find).** Si consideri la struttura-dati a Foresta  $F$  di Alberi per realizzare un numero arbitrario di operazioni di  $MakeSet(..)$ ,  $Union(,..,..)$ , e  $Find(..)$  sull'Universo  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n > 10$ . Si esegua le  $n$  operazioni  $MakeSet(i)$ ,  $i=1, \dots, n$  (Configurazione  $C$ ) e, poi, si risponda alle seguenti domande:

1) Quanti alberi ha la foresta dopo le  $n$  operazioni? **Risposta (max 2 righe)** (1 pto):

2) Che altezza massima hanno gli alberi? **Risposta (max 2 righe)** (1 pto):

3) Sempre partendo dalla Configurazione  $C$ , si esegua  $t > \log n$  operazioni union  $Union(A,B)$  in modo arbitrario (senza tenere conto delle size  $|A|$  e  $|B|$ ) e si risponda alle seguenti domande:

3.a) La massima **altezza** degli alberi può diventare uguale a  $t$  (1 pto)? **Risposta (max 2 righe):**

3.b) Si mostri una sequenza di queste  $t$  operazioni di  $Union(,..,..)$  a partire da  $C$  che richiedono tempo  $\Omega(t^2)$  visualizzando le configurazioni della struttura dopo ogni operazione (3 pti).

n. oper.	Operazione Union(,..,..)	Costo
<b>j=1</b>		
<b>j=2</b>		
....	.....	.....
<b>j=t-1</b>		
<b>j= t</b>		
<b>Costo Totale</b> (mostrare la formula ed il suo costo asintotico):		

4) Sempre partendo dalla Configurazione  $C$ , si eseguano  $t = n/8$  operazioni union  $Union(A,B)$  in modo arbitrario (**tenendo conto delle size  $|A|$  e  $|B|$  - Union by Size**) e si risponda alle seguenti domande:

4.a) Quanto può costare una singola operazione di  $Union(,..,..)$  (1 pto)? **Risposta (Max 1 riga):**

4.b) Quante volte un elemento può cambiare padre (si fornisca una risposta in termini asintotici) (4 pti)? **Risposta (Max 3 righe):**

**Esercizio II (Sequence Alignment).** Si consideri il problema di ottimizzazione *Sequence Alignment* di due stringhe  $X$  ed  $Y$  e si risponda alle seguenti domande:

1) Si definiscano tutti gli elementi di una generica Istanza  $I$ , una generica soluzione ammissibile  $M$  per  $I$ , ed il suo costo  $cost(M)$  da minimizzare (4 pti). **Risposta (Max 6 righe):**

2) Si consideri l'algoritmo ottimale di programmazione dinamica e si risponda alle seguenti domande:

2.a) siano, rispettivamente,  $X_m$  ed  $Y_n$  gli ultimi 2 caratteri di  $X$  ed  $Y$ ; è possibile che in  $M$  vi siano due coppie distinte dove una contiene  $X_m$  e l'altra contiene  $Y_n$  (2 pts)? **Risposta (Max 2 righe):**

3.a) Dalla risposta per (2.a) si definisca la funzione (programma) ricorsiva che lega il costo della soluzione ottima  $OPT(i,j)$  ( $i=1,\dots,m$ ;  $j=1,\dots,n$ ) ai sottoproblemi di ordine inferiore con la relativa inizializzazione per i casi  $OPT(0,j)$  e  $OPT(i,0)$  (4 pts) **Risposta (Max 3 righe):**

**Esercizio III (Set Cover).** Si consideri un problema  $P$  a scelta tra *Independent Set*, *Vertex Cover* e *3-SAT* e si descriva una riduzione polinomiale  $F$  di  $P$  al problema *Set Cover (SC)* (si diano prima le definizioni formali delle istanze dei due problemi) (10 pts).