

# Algoritmi e Strutture Dati (modulo I)

Testo della prova scritta del 14 luglio 2014

docente: Luciano Gualà

Cognome:..... Nome:..... Matr.:..... Corso di Laurea:.....

## Esercizio 1 [10 punti]

- (a) Si ordinino le seguenti funzioni in ordine non decrescente di tasso di crescita asintotica. Per ogni coppia di funzioni  $f_i(n), f_{i+1}(n)$  adiacenti nell'ordinamento si specifichi se  $f_i(n) = \Theta(f_{i+1}(n))$  o se  $f_i(n) = o(f_{i+1}(n))$ .

Le funzioni sono:  $(5/2)^n$ ,  $\frac{n^3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^4+n(n^2+1)}}$ ,  $\sqrt{n+96} + n \log n$ ,  $2^n$ ,  $n\sqrt{n+9} + \log^6 n$ ,  $n^{3/2} \log \log n$ ,  $\frac{n^{1.5} \log n}{17}$ ,  $3^3 2^n$ ,  $\sqrt{n^3 \log n}$ .

- (b) Per un problema sono noti due algoritmi ricorsivi,  $A_1$  e  $A_2$  le cui complessità temporali sono descritte dalle seguenti equazioni di ricorrenza:

$$T_1(n) = T_1(n-1) + \log^2 n;$$

$$T_2(n) = 16 T_2(n/4) + n^{1.5} \log^{3.5} n;$$

Dire, motivando la risposta, quale algoritmo è preferibile usare.

**Esercizio 2 [12 punti]** Sia  $V$  un vettore di  $n$  elementi, dove ogni cella di  $V$  può contenere uno di  $k$  possibili colori, ovvero  $V[i] \in \{c_1, \dots, c_k\}$ . Progettare un algoritmo che, dato  $V$ , costruisca un *oracolo* (ovvero una struttura dati) che sia in grado di rispondere in tempo  $O(1)$  a *query* (ovvero domande) del seguente tipo: dati un indice  $i$  e un colore  $c$ , quale è l'indice della cella di  $V$  più vicina a  $i$  che contiene il colore  $c$ ? Più precisamente, dati  $i$  e  $c$ , l'interrogazione deve tornare un indice  $j$  con  $V[j] = c$  che minimizza  $|i - j|$ . Se non c'è nessuna cella che contiene il colore  $c$  l'interrogazione deve tornare il valore  $-1$ .

L'algoritmo di costruzione dell'oracolo deve avere complessità temporale  $O(kn)$ , mentre l'algoritmo di interrogazione dell'oracolo, come già detto, deve avere complessità temporale  $O(1)$ .

## Esercizio 3 [13 punti]

Il signor Valter Bianchi, dopo aver fatto un bel gruzzoletto vendendo cristalli non proprio legali, ha deciso di diversificare la sua attività e si è messo a vendere della roba – anch'essa non proprio legale – che per comodità chiameremo stecca di cioccolata. La stecca di cioccolata può essere venduta tutta intera o può essere spezzata in segmenti più piccoli da vendere separatamente. La lunghezza della stecca di cioccolata è di  $L$  centimetri, con  $L$  intero. Si assuma che nello spezzare la stecca la lunghezza dei pezzi ottenuti (in centimetri) debba essere ancora un numero intero. Per esempio un pezzo lungo 3 centimetri può essere venduto così, spezzato in tre pezzi da 1 centimetro o in due pezzi: uno da 2 centimetri e l'altro da 1 centimetro (mentre non si possono fare due pezzi da mezzo centimetro e due centimetri e mezzo). Il guadagno che il signor Valter Bianchi riesce a fare se vende un pezzo lungo  $t$  centimetri è  $G(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, L$ . Progettare un algoritmo di programmazione dinamica che aiuti il signor Valter Bianchi a guadagnare il più possibile. La complessità temporale dell'algoritmo deve essere polinomiale in  $L$ .