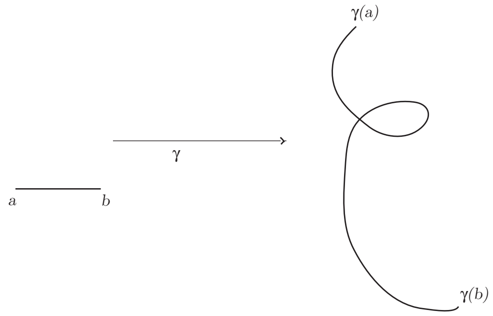
Geometria differenziale delle curve.

1. Curve parametrizzate.

Definizione. Una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione

$$\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix},$$

dove $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ è un intervallo della retta reale con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.



Una curva parametrizzata γ in $\mathbb{R}^2$.

Le funzioni $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$ sono le *componenti* della curva. L'immagine tramite γ dell'intervallo I in $\mathbb{R}^n$ si chiama *traiettoria* (o *supporto*) della curva. I punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ in $\mathbb{R}^n$ sono gli *estremi* della curva. Una curva γ è *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva si dice *semplice* se l'applicazione γ che la definisce è iniettiva.

Intuitivamente, si può pensare una curva come un punto mobile che al variare del tempo descrive una traiettoria nello spazio.

Nel seguito studieremo curve parametrizzate in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ (quindi $n = 2$ o $n = 3$)

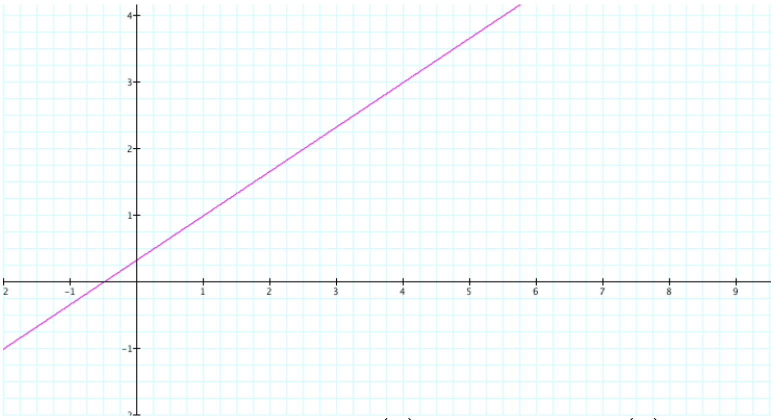
$$\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}.$$

Lo scopo sarà quello di ottenere informazioni sulla geometria della traiettoria, a partire dalle funzioni che ne definiscono una parametrizzazione.

2. Esempi di curve parametrizzate.

• Una retta in $\mathbb{R}^2$, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, in forma parametrica

$$\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto P + tA = \begin{pmatrix} p_1 + ta_1 \\ p_2 + ta_2 \end{pmatrix}.$$



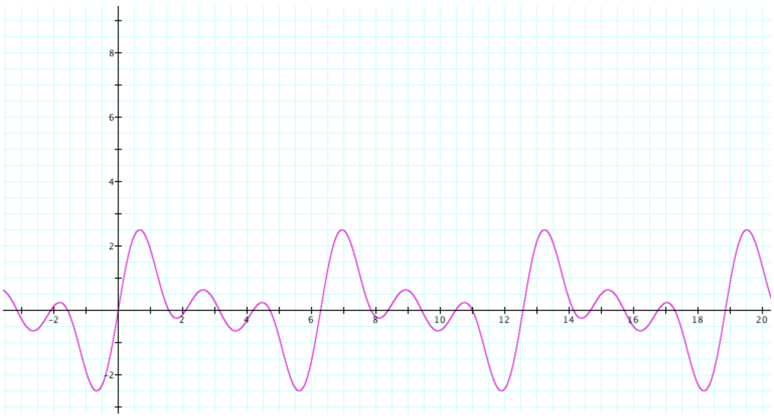
La retta passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallela ad $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Una retta in $\mathbb{R}^3$, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, in forma parametrica

$$\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto P + tA = \begin{pmatrix} p_1 + ta_1 \\ p_2 + ta_2 \\ p_3 + ta_3 \end{pmatrix}.$$

• Il grafico di una funzione $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$

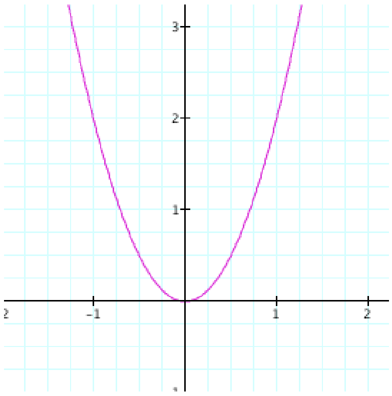
$$\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$



Il grafico della funzione $f(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 3t$.

• La parabola $y = ax^2$ in $\mathbb{R}^2$ può essere parametrizzata così

$$\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix}.$$

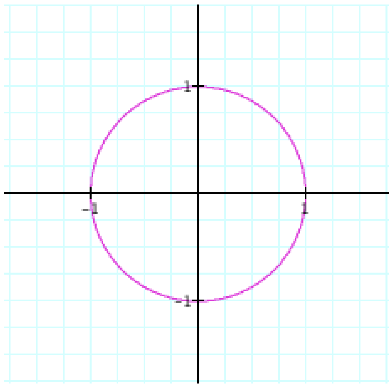


La parabola $y = 2x^2$.

• La circonferenza $x^2 + y^2 = R^2$ di centro l'origine e raggio R in $\mathbb{R}^2$ può essere parametrizzata così

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Al variare di θ fra 0 e 2π, la circonferenza è percorsa una volta, in senso antiorario.

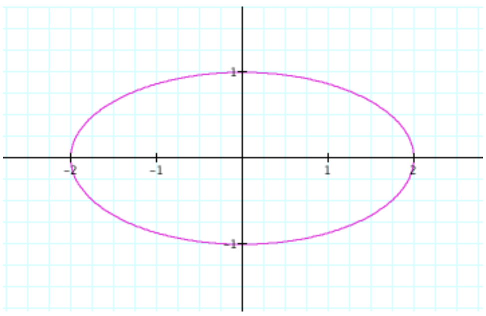


La circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

• L'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con centro l'origine e semiassi a e b in $\mathbb{R}^2$ (con $a, b > 0$) può essere parametrizzata così

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}.$$

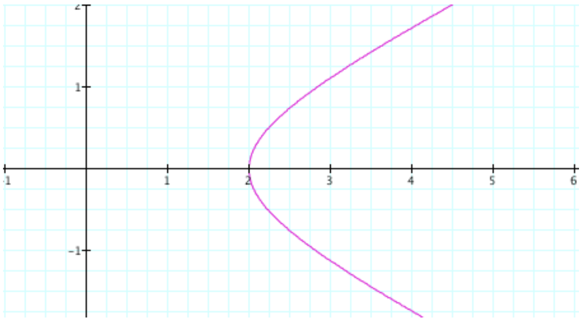
Al variare di θ fra 0 e 2π, l'ellisse è percorsa una volta, in senso antiorario.



L'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

• I due rami dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con centro l'origine e semiassi a e b in $\mathbb{R}^2$ (con $a, b > 0$) possono essere parametrizzati così

$$\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \pm a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}.$$

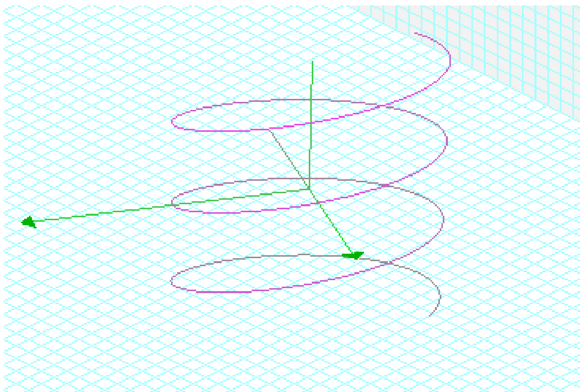


Il ramo dell'iperbole $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, con $x > 0$.

• Al variare di $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad (a, b > 0)$$

descrive una curva che giace sul cilindro verticale di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in $\mathbb{R}^3$ e si chiama elica cilindrica.



L'elica cilindrica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{1}{5} t \end{pmatrix}$.

Osservazione. Ci sono diversi modi di parametrizzare una stessa traiettoria: ad esempio, due diverse parametrizzazioni dell'asse x_3 in $\mathbb{R}^3$ sono date da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R};$$

due diverse parametrizzazioni della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono date da

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \; \theta \in [0, 2\pi], \qquad \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \; \theta \in [0, 2\pi].$$

Nel primo caso la circonferenza è percorsa una volta in senso antiorario; nel secondo caso è percorsa due volte, sempre in senso antiorario.

3. Curve parametrizzate regolari.

Per semplicità considereremo curve γ le cui componenti $\gamma_i(t)$ sono infinitamente differenziabili.

Definizione. Una curva parametrizzata $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *regolare* se per ogni $t \in I$ il vettore

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

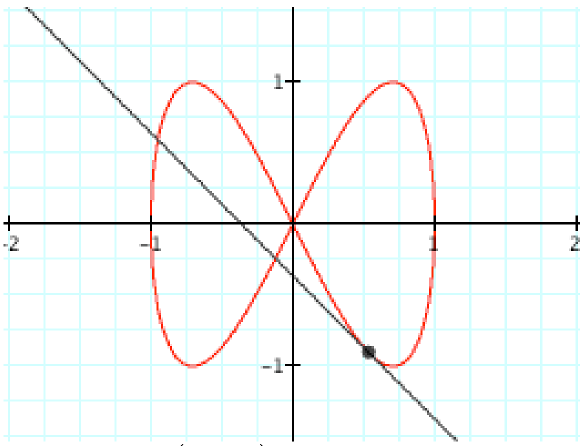
(Se c'e' un punto $t_0 \in I$ in cui $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$, si considerano separatamente le componenti di $I \setminus \{t_0\}$, su cui γ è regolare).

Il vettore $\gamma'(t)$ è chiamato *vettore tangente alla curva* in $\gamma(t)$: al variare di $t \in I$, è un vettore parallelo alla retta tangente alla curva nel punto $\gamma(t)$, con verso concorde al senso di percorrenza della curva. Vedremo in seguito che la sua norma $\|\gamma'(t)\|$ coincide con la "velocità scalare" con cui è percorsa la curva, at tempo t.

Esempio. Consideriamo la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin 2\pi t \\ \cos 4\pi t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in [0,1]$. Il vettore tangente è dato da

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos 2\pi t \\ -4\pi \cos 4\pi t \end{pmatrix}, \qquad \|\gamma'(t)\|^2 = 4\pi^2 \cos^2 2\pi t(1 + 16 \sin^2 2\pi t) > 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

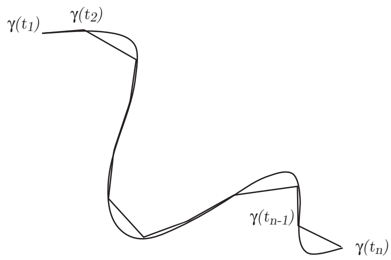
Dunque $\gamma'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $t \in [0,1]$ e la curva γ è regolare.



La traiettoria della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin 2\pi t \\ \cos 4\pi t \end{pmatrix}$ e la retta tangente in un punto della traiettoria.

4. Lunghezza di un arco di curva.

Sia $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ è un insieme di punti $t_1 = a < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Ad ogni suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ possiamo associare una *poligonale* P con vertici $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_n)$ su γ.



Una poligonale P con vertici sulla curva γ.

La lunghezza di questa poligonale è data dalla somma delle lunghezze dei suoi lati

$$L(P) = \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \|\gamma(t_3) - \gamma(t_2)\| + \ldots \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\|.$$

Aggiungendo punti ad una suddivisione data dell'intervallo $[a,b]$, si determina una poligonale P' di lunghezza $L(P') \geq L(P)$ (per la disuguaglianza triangolare). Inoltre, $L(P')$ è più vicina alla lunghezza della traiettoria di γ. Al tendere all'infinito del numero dei punti delle suddivisioni di $[a,b]$ così ottenute, le lunghezze delle poligonali associate formano una successione monotona non decrescente che converge all' integrale $\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$.

Definizione. Definiamo *lunghezza d'arco* la funzione data da

$$L_\gamma(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|d\tau = \int_a^t \sqrt{\gamma_1(\tau)^2 + \ldots + \gamma_n(\tau)^2}d\tau.$$

La funzione L_γ è positiva, perché è integrale di una funzione positiva; inoltre è strettamente crescente: infatti, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la sua derivata è data da

$$L'_\gamma(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t \|\gamma'(\tau)\|d\tau = \|\gamma'(t)\|,$$

ed è positiva positiva dato che per una curva regolare $\|\gamma'(t)\| > 0$, per ogni $t \in [a,b]$.

La norma $\|\gamma'(t)\|$ del vettore $\gamma'(t)$ coincide con la *velocità scalare* con cui è percorsa la traiettoria di γ, che per definizione è appunto la derivata della distanza percorsa $L_\gamma(t)$ rispetto al tempo t.

Esempio. La lunghezza del tratto di elica cilindrica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, percorso nell'intervallo di tempo $[-2\pi, t]$ è data da

$$L_\gamma(t) = \int_{-2\pi}^t \sqrt{\sin^2\tau + \cos^2\tau + 1}d\tau = \int_{-2\pi}^t \sqrt{2}d\tau = \sqrt{2}(t + 2\pi).$$

In particolare, la lunghezza del tratto di elica cilindrica parametrizzato dall'intervallo $[-2\pi.4\pi]$ risulta $L_\gamma([-2\pi, 4\pi]) = 6\pi\sqrt{2}$.

5. Parametrizzazioni equivalenti.

Ci sono diversi modi di parametrizzare una stessa traiettoria. Siano $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tilde{\gamma}\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni di una stessa traiettoria.

Definizione. Si dice che γ e $\tilde{\gamma}$ sono equivalenti se esiste una funzione $\phi\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$, infinitamente differenziabile, strettamente crescente o decrescente (con $\phi'(t) \neq 0$, per ogni $t \in [a,b]$), tale che

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\phi(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

Esempio. Le due diverse parametrizzazioni dell'asse x_3 in $\mathbb{R}^3$ date da

$$\bar{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

non sono equivalenti. Infatti per $\phi(t) = t^3$ si ha $\gamma(t) = \bar{\gamma}(\phi(t))$, ma $\phi'(0) = 0$.

Esempio. Le due diverse parametrizzazioni della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ date da

$$\bar{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}, \ s \in [0, 2\pi], \qquad \gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in [0, \pi].$$

sono equivalenti. Infatti $\gamma(\theta) = \bar{\gamma}(\phi(\theta))$, con $\phi(\theta) = 2\theta$. Inoltre $\phi\colon [0,\pi] \to [0,2\pi]$ è una funzione biiettiva, con $\phi'(\theta) \equiv 2 > 0$.

Derivando γ e $\tilde{\gamma}$ rispetto a t, otteniamo

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(\phi(t))\phi'(t) \quad \text{ossia} \quad \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1'(\phi(t)) \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_n'(\phi(t)) \end{pmatrix} \phi'(t), \tag{5.1}$$

da cui vediamo che, date due parametrizzazioni equivalenti γ e $\bar{\gamma}$ di una stessa traiettoria:

(a) γ è regolare se e solo se $\tilde{\gamma}$ è regolare;

(b) i vettori tangenti $\gamma'(t)$ e $\tilde{\gamma}'(t)$ hanno la stessa direzione;

(c) i vettori tangenti $\gamma'(t)$ e $\tilde{\gamma}'(t)$ hanno lo stesso verso se e solo se $\phi'(t) > 0$, per ogni $t \in [a,b]$. Altrimenti hanno verso opposto.

Derivando γ' e $\tilde{\gamma}'$ rispetto a t, otteniamo

$$\gamma''(t) = \tilde{\gamma}''(\phi(t))\phi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(\phi(t))\phi''(t) \tag{5.2}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \gamma_1''(t) \\ \vdots \\ \gamma_n''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1''(\phi(t)) \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_n''(\phi(t)) \end{pmatrix} \phi'(t)^2 + \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1'(\phi(t)) \\ \vdots \\ \tilde{\gamma}_n'(\phi(t)) \end{pmatrix} \phi''(t),$$

da cui vediamo che i vettori $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$, e i vettori $\tilde{\gamma}'(t)$ e $\tilde{\gamma}''(t)$, *se generano un piano*, generano lo stesso piano

$$\mathrm{Span}\{\gamma'(t), \gamma''(t)\} = \mathrm{Span}\{\tilde{\gamma}'(\phi(t)), \tilde{\gamma}''(\phi(t))\}.$$

Questo piano si chiama *piano osculatore alla curva.*

Osservazione. I punti in cui $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ non sono linearmente indipendenti, e dunque non generano un piano, sono i cosidetti *punti di flesso.*

Osservazione. Le relazioni (5.1) e (5.2) suggeriscono che la *direzione del vettore tangente* e il *piano osculatore* sono determinati dalla geometria della traiettoria, e non dipendono dalla parametrizzazione. Studiare la velocità con cui variano lungo la traiettoria ci darà informazioni sulla geometria della traiettoria. Prima di far questo però è necessario "normalizzare" il modo in cui la traiettoria viene percorsa.

6. Parametrizzazione di una curva regolare rispetto alla lunghezza d'arco lunghezza d'arco.

In questa sezione dimostriamo che la traiettoria di una curva regolare $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ammette una parametrizzazione $\bar{\gamma}$, equivalente a γ, con velocià scalare costante uguale a uno.

Come abbiamo visto nella Sezione 4, la funzione "lunghezza d'arco" $L_\gamma(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ ha derivata $L'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|$ strettamente positiva in ogni punto e definisce dunque una biiezione

$$L_\gamma\colon [a,b] \longrightarrow [0,L], \qquad \text{dove} \qquad L = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| d\tau$$

è la lunghezza di $\gamma([a,b])$. Se definiamo $\bar{\gamma} := \gamma \circ L_\gamma^{-1}$, abbiamo che $\bar{\gamma}\colon [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, soddisfa

$$\bar{\gamma}(L_\gamma(t)) = \gamma(t), \quad \forall t \in [a,b] \tag{6.1}$$

ed è una *parametrizzazione equivalente della traiettoria di* γ. Se chiamiamo $s = s(t) = L_\gamma(t)$, derivando la (6.1), troviamo

$$\frac{d}{dt}\bar{\gamma}(L_\gamma(t)) = \frac{d}{ds}\bar{\gamma}(s)\frac{d}{dt}L_\gamma(t) = \bar{\gamma}'(s) \cdot \|\gamma'(t)\| = \gamma'(t), \quad \text{da cui} \quad \bar{\gamma}'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \ \text{ e } \ \|\bar{\gamma}'(s)\| \equiv 1.$$

Dunque la traiettoria è percorsa con *velocità scalare costante uguale a uno.* In questo caso si dice che la traiettoria è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.* Si verifica infatti che

$$L_{\bar{\gamma}}(s) = \int_0^s \|\bar{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_0^s d\tau = s,$$

ossia la lunghezza dell'arco di curva $\bar{\gamma}$ parametrizzato dall'intervallo $[0,s]$ è proprio s.

Esempio. La circonferenza $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0,2\pi]$, è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Infatti $\|\gamma'(x)\| = \| \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \| = 1$ e la lunghezza della traiettoria percorsa nell'intervallo $[0,\theta]$ è

$$L_\gamma(\theta) = \int_0^\theta \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^\theta d\tau = \theta.$$

Esempio. Sia $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \frac{2}{3}t^3 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$. In questo caso $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$, da cui

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = (1 + 2t^2).$$

La curva non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco: infatti

$$L_\gamma(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = t + \frac{2}{3}t^3 \neq t.$$

7. Curvatura di una curva in $\mathbb{R}^2$.

Sia $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix},$$

una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco (percorsa a velocità scalare costante uguale a uno) e sia

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix}, \qquad \|\gamma'(s)\| \equiv 1$$

il *versore tangente* alla curva, che indicheremo anche con

$$\mathbf{t}(s) := \gamma'(s).$$

Consideriamo adesso la derivata del versore tangente

$$\gamma''(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1''(s) \\ \gamma_2''(s) \end{pmatrix}.$$

• *Il vettore $\gamma''(s)$ è ortogonale a $\gamma'(s)$* (quando è non nullo).

Infatti

$$\gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = \gamma_1'(s)^2 + \gamma_2'(s)^2 \equiv 1$$

implica

$$0 = \frac{d}{ds}(\gamma'(s) \cdot \gamma'(s)) = 2\gamma_1'(s)\gamma_1''(s) + 2\gamma_2'(s)\gamma_2''(s) = 2\gamma''(s) \cdot \gamma'(s).$$

Definiamo *versore normale* alla curva il versore di $\gamma''(s)$ (quando $\gamma''(s)$ è non nullo) e lo indichiamo con

$$\mathbf{n}(s) := \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}.$$

Definizione. Definiamo *curvatura* della curva γ la funzione

$$k(s) := \|\gamma''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\|$$

e *raggio di curvatura* di γ il suo reciproco

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)} \quad (\text{per } k(s) \neq 0).$$

Il significato geometrico della curvatura e del raggio di curvatura sono precisati dal seguente fatto:

Per ogni $s \in I$, il cerchio di centro $C(s) = \gamma(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)$ e raggio $\rho(s)$ è un cerchio tangente alla curva in $\gamma(s)$ detto cerchio osculatore a γ in $\gamma(s)$.

Definizione. La curva $C(s)$ descritta dai centri dei cerchi osculatori a γ al variare di $s \in I$, è detta *evoluta* di γ.

In generale, la curvatura misura la velocità con cui una curva γ si discosta da una retta. Quanto maggiore è la curvatura, tanto più la curva si "arriccia".

Esempio. Sia $\gamma(t) = P + tA$, con $t \in \mathbb{R}$, una retta in $\mathbb{R}^2$ in forma parametrica. Si ha che la retta è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco se e solo se $\|A\| = 1$. Il versore tangente $\gamma'(t) = A$ è costante, da cui segue che $\gamma''(t) \equiv 0$. In questo caso si dice che la curvatura di γ è identicamente nulla: $\kappa(t) \equiv 0$. D'altra parte...una retta non curva.

Esempio. Sia $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{1}{R}\theta \\ R\sin\frac{1}{R}\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, la circonferenza di centro l'origine e raggio R. Osserviamo innanzitutto che γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco: infatti

$$\gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{1}{R}\theta \\ \cos\frac{1}{R}\theta \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(\theta)\| \equiv 1.$$

Quindi possiamo calcolare la curvatura e il raggio di curvatura di γ direttamente dalle definizioni

$$k(\theta) = \|\gamma''(\theta)\| = \| \begin{pmatrix} -\frac{1}{R}\cos\frac{1}{R}\theta \\ -\frac{1}{R}\sin\frac{1}{R}\theta \end{pmatrix} \| \equiv \frac{1}{R}, \qquad \rho(\theta) \equiv R.$$

Dunque la circonferenza di raggio R ha curvatura costante inversamente proporzionale al raggio: tanto maggiore è il raggio, tanto meno curva è la circonferenza.
Il cerchio di centro

$$C = \begin{pmatrix} R\cos\frac{1}{R}\theta \\ R\sin\frac{1}{R}\theta \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} -\cos\frac{1}{R}\theta \\ -\sin\frac{1}{R}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e raggio R è il cerchio osculatore ad ogni punto della circonferenza. Come previsto coincide con la circonferenza stessa.

La curvatura con segno. Per le curve del piano a volte si considera la *curvatura con segno* k_s, che dà informazioni non solo sulla geometria della traiettoria ma anche sul senso in cui è percorsa.
Sia $\mathbf{t}(s)$ il versore tangente alla curva e sia $\mathbf{n}_s(s)$ un versore normale a $\mathbf{t}(s)$ e tale che la coppia $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_s(s)\}$ sia orientata positivamente. Osserviamo che il versore $\mathbf{n}_s(s)$ è sempre ben definito, anche quando $\gamma''(s) = O$. Se $\gamma''(s) \neq O$, allora $\mathbf{n}_s(s) = \pm\mathbf{n}(s)$.
La *curvatura con segno* è per definizione la funzione per cui vale

$$\gamma''(s) = k_s(s)\mathbf{n}_s(s).$$

In particolare,

$$k_s(s) := \gamma''(s) \cdot \mathbf{n}_s(s).$$

Osservazione. Sia $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$, $s \in I$ una curva in $\mathbb{R}^2$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Scriviamo il versore tangente come $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}$, con $\theta(s)$ angolo che dipende da s. Il versore $\mathbf{n}_s$ è dato allora da $\mathbf{n}_s(s) = \begin{pmatrix} -\sin\theta(s) \\ \cos\theta(s) \end{pmatrix}$. Derivando γ' rispetto ad s troviamo $\gamma''(s) = \theta'(s)\begin{pmatrix} -\sin\theta(s) \\ \cos\theta(s) \end{pmatrix}$ e la curvatura con segno risulta

$$k_s(s) = \gamma''(s) \cdot \mathbf{n}_s(s) = \theta'(s)\begin{pmatrix} -\sin\theta(s) \\ \cos\theta(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta(s) \\ \cos\theta(s) \end{pmatrix} = \theta'(s).$$

Da ciò segue che nei tratti in cui la curva "gira" in senso antiorario la curvatura con segno è positiva e coincide con la curvatura "assoluta": $k_s(s) = k(s) > 0$; nei tratti in cui la curva "gira" in senso orario la curvatura con segno è negativa e vale $k_s(s) = -k(s) < 0$.

Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva in $\mathbb{R}^2$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad X \mapsto MX + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2,\ M \text{ matrice ortogonale, con } \det M = 1. \tag{$*$}$$

Si verifica facilmente che la curva $\bar{\gamma}(s) = M\gamma(s) + \mathbf{b}$, immagine di γ tramite F, ha la stessa curvatura con segno di γ.
Viceversa, la curvatura con determina completamente una curva del piano, a meno di movimenti rigidi:

Teorema (Teorema fondamentale della teoria delle curve del piano). *Sia data una funzione differenziabile $k_s(s),\ s \in I$. Esiste una curva $\gamma = \gamma(s)$ in $\mathbb{R}^2$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, la cui curvatura con segno è $k_s(s)$. Tale curva è unica a meno di movimenti rigidi del piano di tipo (*).*

Esempio. Sia $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$, $s \in I$ una curva in $\mathbb{R}^2$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura identicamente nulla $\kappa(s) \equiv 0$. Allora γ è un segmento di retta.

Dim. Sia $\gamma'(s)$ il versore tangente a γ. Se $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| \equiv 0$, allora il versore tangente è costante $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(s) \\ \gamma_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Integrando rispetto ad s, si trova $\gamma(s) = \begin{pmatrix} c_1 s + d_1 \\ c_2 s + d_2 \end{pmatrix}$, come richiesto.

Esempio. Sia $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$, $s \in I$ una curva in $\mathbb{R}^2$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura costante $\kappa_s(s) \equiv \frac{1}{R}$. Allora γ è un arco di circonferenza percorso in senso antiorario.

Dim. Sia $\gamma'(s)$ il versore tangente a γ. Scriviamo $\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{pmatrix}$, con $\theta(s)$ angolo che dipende da s. Poiché la curvatura con segno è data da $k_s(s) = \theta'(s)$ (cf. Osservazione precedente) e per ipotesi $\theta'(s) \equiv \frac{1}{R}$, abbiamo che

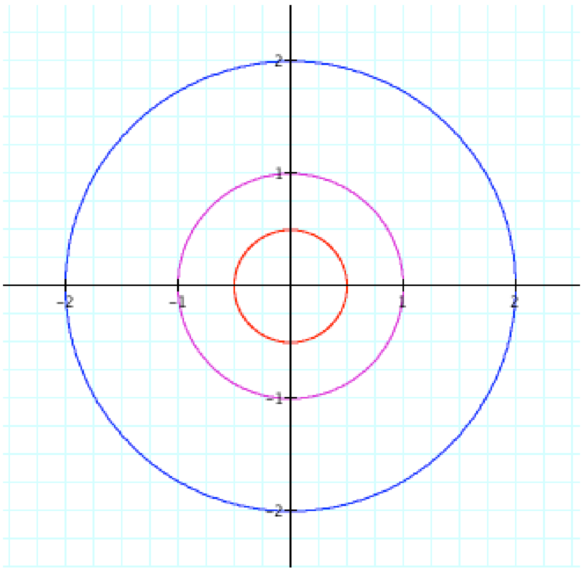
$$\theta(s) = \frac{s}{R} + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \gamma'(s) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{R} + c) \\ \sin(\frac{s}{R} + c) \end{pmatrix}.$$

Integrando rispetto ad s, troviamo infine

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} -R\sin(\frac{s}{R} + c) + x_0 \\ R\cos(\frac{s}{R} + c) + y_0 \end{pmatrix},$$

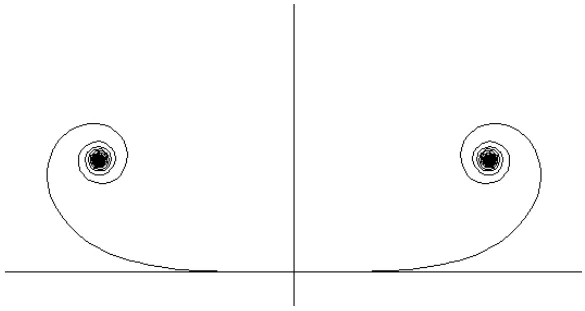
che è un arco di circonferenza di raggio R percorsa in senso antiorario.

Esempio.



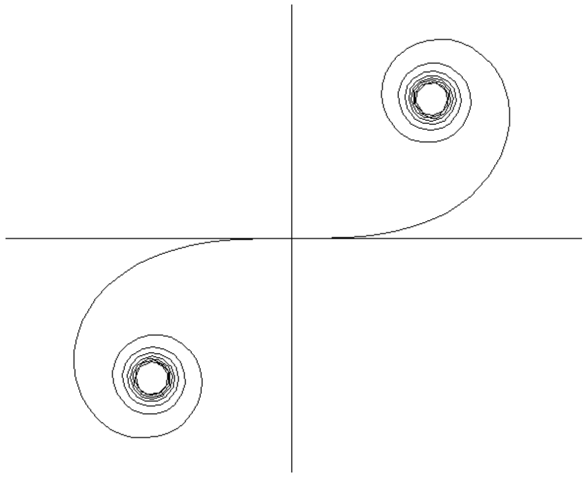
Le circonferenze di raggio $R = \frac{1}{2}, 1, 2$, con curvatura costante $\kappa(s) \equiv 2, 1, \frac{1}{2}$, rispettivamente.

Esempio.



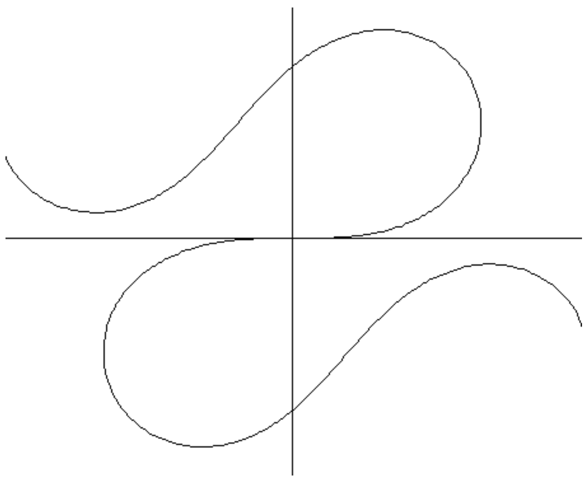
La curva con curvatura $\kappa_s(s) = s^2$

Esempio.



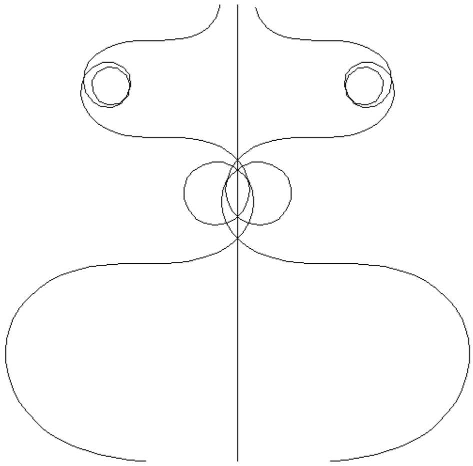
La curva con curvatura $\kappa_s(s) = s$

Esempio.



La curva con curvatura $\kappa_s(s) = \sin \frac{1}{2} s$

Esempio.



La curva con curvatura $\kappa_s(s) = s \sin s$.

8. Curvatura e torsione di una curva in $\mathbb{R}^3$. Equazioni di Frenet.
Analogamente a quanto abbiamo fatto per le curve del piano, anche per le curve dello spazio

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix}$$

parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, definiamo la curvatura come

$$\kappa(s) := \|\gamma''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\|.$$

Assumiamo da ora in poi che i vettori $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{t}'(s)$ siano linearmente indipendenti e in particolare che sia ben definito il piano osculatore alla curva. In tal caso vale

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \tag{8.1}$$

con

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s) = \textit{versore tangente}, \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \textit{versore normale}. \tag{8.2}$$

Definiamo poi il *versore binormale* come

$$\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s). \tag{8.3}$$

Il versore binormale individua la direzione normale al piano osculatore a γ in $\gamma(s)$. Al variare di s, i versori $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ formano una terna ortonormale, orientata positivamente, detta *Terna di Frenet.*

• Per la derivata del versore binormale valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{b}(s) = 0, \qquad \mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0.$$

La prima si ottiene derivando $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1$, la seconda derivando $\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$:

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s)) = \mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{b}(s) + \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}'(s) = 2\mathbf{b}'(s) \cdot \mathbf{b}(s);$$

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{t}(s)) = \mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{t}'(s) = \mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)\cdot\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}'(s)\cdot\mathbf{t}(s).$$

Ne segue che

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s). \tag{8.4}$$

Definizione. La funzione $\tau(s)$ che appare nella (8.4) è per definizione *torsione* della curva.

La torsione misura la velocità con cui varia il piano osculatore lungo la curva; quindi misura quanto γ si discosta dall'essere una curva piana (ossia interamente contenuta in un piano di $\mathbb{R}^3$).

Derivando la relazione $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$ (che segue da $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$) si ottiene

$$\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s)\wedge\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\wedge\mathbf{t}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)\wedge\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)\wedge\kappa(s)\mathbf{n}(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s). \tag{8.5}$$

Le tre equazioni (8.2), (8.5),(8.4)

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \end{cases}$$

si chiamano le *equazioni di Frenet* della curva.

Esempio. Sia $\gamma(t) = P + tA$ una retta in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con $\|A\| = 1$. Come abbiamo già osservato, il versore tangente $\gamma'(t) = A$ è costante, da cui segue che $\gamma''(t) \equiv 0$. In questo caso si dice che la curvatura e la torsione di γ sono identicamente nulle: $\kappa(t) = \tau(t) \equiv 0$. La retta è chiaramente una curva piana: ci sono infiniti piani dello spazio che la contengono.

Esempio. Sia γ l'elica cilindrica di equazioni

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \sin\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ soddisfa $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$, per cui γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e possiamo calcolarne curvatura e torsione direttamente dalle equazioni di Frenet. Dal calcolo di $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ 0 \end{pmatrix}$, troviamo che γ ha curvatura costante

$$\kappa(t) = \|\gamma''(t)\| \equiv \frac{1}{2}.$$

Al variare di t, i cerchi osculatori alla curva sono cerchi di centro $C(t) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ -\sin\frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e raggio $R = 2$, giacenti sui rispettivi piani osculatori. Ad esempio, il cerchio osculatore in $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il cerchio di centro $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio $R = 2$, nel piano di equazione $x_2 - x_3 = 0$.

Al variare di t, la terna di Frenet è data da

$$\mathbf{t}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ -\sin \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Il fatto che il versore binormale non sia costante al variare di t, ci dice già che la curva non è piana. Derivando il vettore binormale, troviamo

$$\mathbf{b}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ \frac{1}{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau(t) \equiv -\frac{1}{2}.$$

Dunque l'elica cilindrica ha sia curvatura che torsione costanti. Si può anche osservare che la tangente $\gamma'(t)$ forma un angolo costante uguale a 45^0 con l'asse x_3, a conferma che la curva "sale" con pendenza costante. Le sezioni orizzontali del cilindro su cui si avvolge la curva sono cerchi di raggio $r = 1$, e dunque hanno curvatura $\kappa = 1$. Il fatto che l'elica abbia curvatura $\kappa = \frac{1}{2}$, corrisponde al fatto che per "sollevarsi" dal piano, la curva si stende.

Osservazione. Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia

$$F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad X \mapsto MX + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3,\ M \text{ matrice ortogonale, con } \det M = 1. \qquad (*)$$

Si verifica facilmente che la curva $\bar{\gamma}(s) = M\gamma(s) + \mathbf{b}$, immagine di γ tramite F, ha la stessa curvatura e la stessa torsione di γ.
Viceversa, la curvatura e la torsione determinano completamente una curva dello spazio, a meno di movimenti rigidi:

Teorema (Teorema fondamentale della teoria delle curve dello spazio). *Siano date due funzioni differenziabili $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I$. Esiste una curva $\gamma = \gamma(s)$ in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura $k(s)$ e torsione $\tau(s)$. Tale curva è unica a meno di movimenti rigidi dello spazio del tipo (*).*

Esempio. Sia $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix}$, $s \in I$ una curva in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con torsione identicamente nulla $\tau(s) \equiv 0$. Allora γ è una curva piana.
Dim. Facciamo vedere che i piani osculatori a γ sono tutti coincidenti. Se $\tau(s) = \|\mathbf{b}'(s)\| \equiv 0$, il versore binormale è costante $\mathbf{b}(s) \equiv B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Di conseguenza, al variare di s, i piani osculatori alla curva sono la famiglia di pani paralleli

$$B \cdot X = B \cdot \gamma(s), \quad \text{ossia} \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_1\gamma_1(s) + b_2\gamma_2(s) + b_3\gamma_3(s).$$

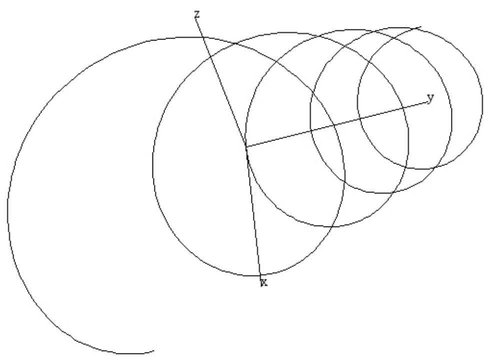
Derivando $B \cdot \gamma(s)$ rispetto ad s, troviamo

$$\frac{d}{ds}(B \cdot \gamma(s)) = B \cdot \gamma'(s) = B \cdot \mathbf{t}(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B \cdot \gamma(s) \equiv c \in \mathbb{R}.$$

Dunque le equazioni dei piani osculatori alla curva hanno tutti anche lo stesso termine noto. Ne segue che tutti i piani osculatori coincidono con il piano che contiene la curva.

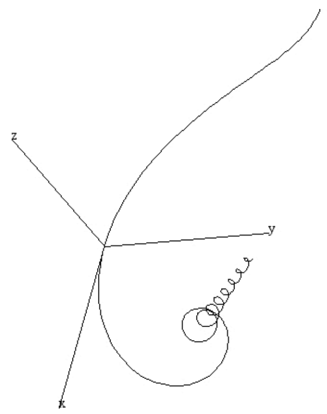
Esempio. Sia $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix}$, $s \in I$ una curva in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, con curvatura e torsione identicamente nulle $\kappa(s) \equiv \tau(s) \equiv 0$. Allora γ è un segmento di retta.

Esempio.



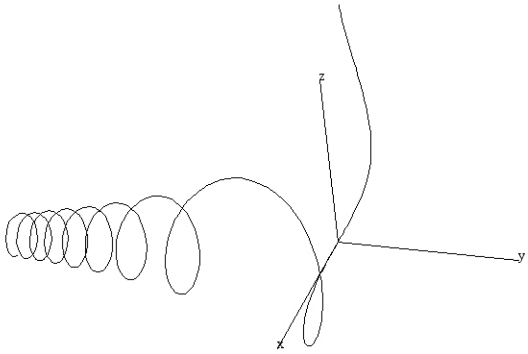
La curva con curvatura costante $\kappa(s) \equiv 1$ e torsione costante $\tau(s) = 1$.

Esempio.



La curva con curvatura $\kappa(s) = 1$ e torsione $\tau(s) = s$.

Esempio.



La curva con curvatura $\kappa(s) = s$ e torsione $\tau(s) = 1$.

9. Curvatura e torsione di una curva rispetto ad una parametrizzazione qualunque.
Dai risultati dei paragrafi precedenti, segue che ad ogni punto della traiettoria di una curva parametrizzata regolare dello spazio $\gamma(t),\ t \in I$, è associata una terna ortonormale di vettori, orientata positivamente,

$$\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$$

così definiti:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t), \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}. \tag{9.1}$$

Le formule (9.1) sono equivalenti alle formule (8.2) e (8.3) del paragrafo precedente, quando γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.
La terna di Frenet dipende essenzialmente dalla geometria della traiettoria: infatti per la relazione (5.1), la direzione del versore tangente $\mathbf{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ è la stessa in due qualunque parametrizzazioni equivalenti; per la relazione (5.2) la direzione del versore binormale $\mathbf{b}(t) = \frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}$, ortogonale al piano osculatore (quando è definito), è la stessa in due qualunque parametrizzazioni equivalenti; lo stesso vale anche per il versore normale $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t)$.
Le velocità con cui variano le direzioni dei versori della terna di Frenet sono quantificate da curvatura e torsione e determinano completamente la geometria della traiettoria. D'altra parte però, curvatura e torsione di una curva possono essere calcolate con le formule di Frenet solo se la curva è *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco*. Non sempre è possibile riparametrizzare esplicitamente la traiettoria rispetto alla lunghezza d'arco perché la funzione data dall'integrale

$$L_\gamma(s) = \int_a^s \|\gamma'(x)\| dx$$

potrebbe essere non esprimibile in termini di funzioni elementari. È importante dunque esprimere curvatura e torsione rispetto ad una parametrizzazione qualunque.

Proposizione. *Sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva parametrizzata regolare in $\mathbb{R}^3$. Allora curvatura e torsione sono date dalle formule*

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ \tau(t) &= -\frac{(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = -\frac{\det(\gamma'(t)\gamma''(t)\gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} \end{aligned}$$

dove $\det(\gamma'(t)\gamma''(t)\gamma'''(t))$ *indica il determinate della matrice* 3×3 *che ha per colonne i vettori* $\gamma', \gamma'', \gamma'''$.

Dim. Queste formule si dimostrano combinando le regole di derivazione di funzioni composte con le formule di Frenet. Scriviamo

$$\gamma(t) = \bar{\gamma}(\phi(t)), \qquad s = \phi(t) = \text{lunghezza d'arco}.$$

Almeno teoricamente questo si può sempre fare. Allora le equazioni (5.1) e (5.2) della sezione 5

$$\gamma'(t) = \bar{\gamma}'(s)\phi'(t), \qquad \gamma''(t) = \tilde{\gamma}''(\phi(t))\phi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(\phi(t))\phi''(t)$$

diventano

$$\gamma'(t) = \mathbf{t}(s)\|\gamma'(t)\|, \qquad \gamma''(t) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)\|\gamma'(t)\|^2 + \mathbf{t}(s)\frac{d}{dt}(\|\gamma'(t)\|).$$

Poiché il versore di $\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)$ coincide con il versore binormale alla curva, dalla relazione

$$\frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|} = \frac{\|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}\kappa(s)\mathbf{b}(s)$$

possiamo ricavare

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3},$$

come richiesto. In modo simile, derivando l'equazione $\gamma''(t) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)\|\gamma'(t)\|^2 + \mathbf{t}(s)\frac{d}{dt}(\|\gamma'(t)\|)$, si ottiene la formula per la torsione.

Esercizio. *Grafici di funzioni in* $\mathbb{R}^2$. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva della forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix},$$

dove $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione C^∞.

(i) Dimostrare che γ è regolare in tutti i punti.
(ii) Calcolare la curvatura di γ.

Soluzione. (i) Per ogni $t\in\mathbb{R}$, si ha $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per cui la curva è regolare ovunque.
(ii) Scriviamo $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, così da poter usare le formule per le curve in $\mathbb{R}^3$, rispetto ad una parametrizzazione qualunque. Derivando troviamo $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(t) \\ 0 \end{pmatrix}$. La curvatura di γ è data da

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{|f'(t)|}{(\sqrt{1+(f'(t))^2})^3}.$$

Esercizio. Sia $\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'ellisse definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare il versore tangente e il versore normale a γ al variare di $t\in\mathbb{R}$.
(ii) Calcolare la curvatura di γ al variare di t.
(iii) Determinare il cerchio osculatore a γ nei punti dove la curvatura è massima e minima.

(i) La curva non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e il versore tangente è dato da

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Per calcolare versore normale $\mathbf{n}(t)$, curvatura etc... , conviene scrivere $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ e usare le formule per una curva in $\mathbb{R}^3$. Per il versore normale si calcola $\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t)$ e poi se ne prendono le prime due coordinate:

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(perché la curva è piana e percorsa in senso antiorario)}$$

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}.$$

(ii) La curvatura di γ al variare di t è data da

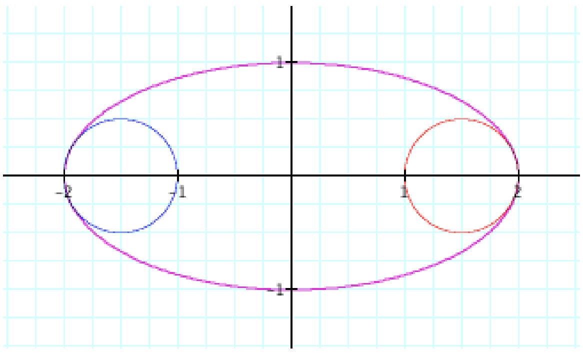
$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2}{(\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t})^3}.$$

(iii) La curvatura è massima per $t = 0, \pi$, dove vale $k(0) = k(\pi) = 2$ ed è minima per $t = \pi/2, 3\pi/2$, dove vale $k(\pi/2) = k(3\pi/2) = 1/4$. Nei punti di curvatura massima, i cerchi osculatori sono cerchi tangenti internamente alla curva, di raggio $\rho = 1/2$ e centri dati rispettivamente da

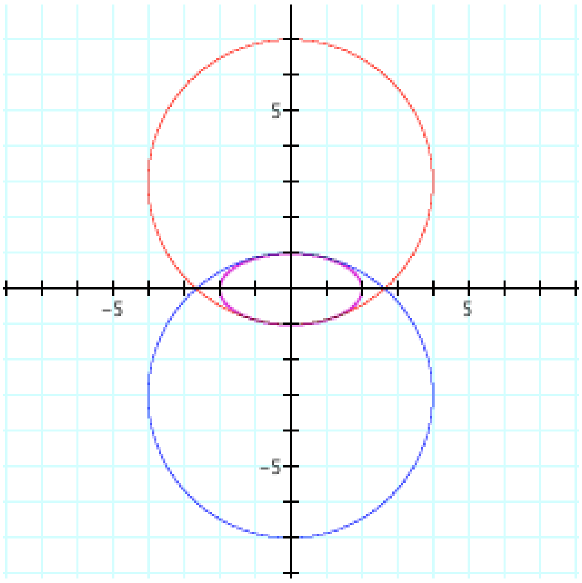
$$C(0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C(\pi) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nei punti di curvatura massima, i cerchi osculatori sono cerchi tangenti internamente alla curva, di raggio $\rho = 4$ e centri dati rispettivamente da

$$C(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad C(3\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Cerchi osculatori nei punti di curvatura massima.



Cerchi osculatori nei punti di curvatura minima.

Esercizio. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la cubica dello spazio $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Calcolare il triedro di Frenet di γ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Calcolare la curvatura e la torsione di γ al variare di t.

Dim. (a) Calcoliamo innanzitutto

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 6t^2 \\ -6t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$ la curva è regolare ed i vettori $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ sono non nulli e linearmente indipendenti. Quindi il triedro è ben definito in ogni punto della curva. Osserviamo anche che la curva non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Quindi per calcolare il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione dobbiamo usare le formule della Sezione 9. Il versore tangente alla curva è dato da

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix},$$

il binormale da

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{4+36t^2+36t^4}} \begin{pmatrix} 6t^2 \\ -6t \\ 2 \end{pmatrix}$$

ed il normale da

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{4+36t^2+36t^4}\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \begin{pmatrix} -4t-18t^3 \\ 2-18t^4 \\ 6t+12t^3 \end{pmatrix}.$$

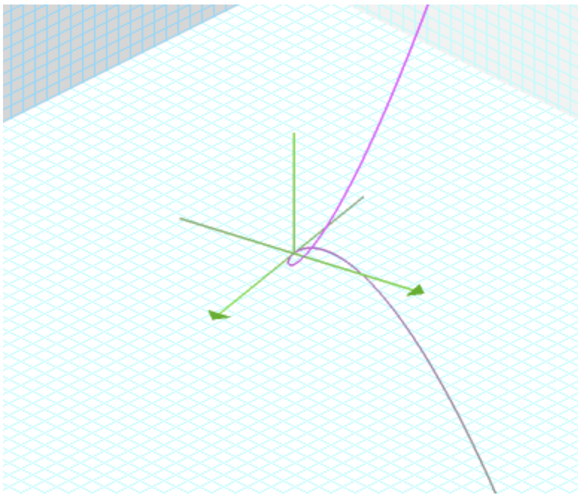
(b) La curvatura è data da

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \right\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 6t^2 \\ -6t \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \right\|^3} = \frac{\sqrt{4+36t^2+36t^4}}{(\sqrt{1+4t^2+9t^4})^3}.$$

Ad esempio, per $t = 0$, la curvatura risulta $\kappa(0) = 2$, mentre per $t = 1$ risulta $\kappa(1) = 76/14^3 < 2$. Si vede inoltre che al tendere di t a $\pm\infty$, la curvatura tende a zero. La torsione è data da

$$\tau(t) = -\frac{\det(\gamma'(t)\gamma''(t)\gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{12}{(36t^4 + 36t^2 + 4)}.$$

Poiché la torsione non è identicamente nulla, la curva non è piana. Ad ogni modo, al tendere di t a $\pm\infty$, la torsione tende a zero.



La cubica $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.