

## 6. Trasformazioni in $\mathbf{R}^3$ .

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche dello spazio  $\mathbf{R}^3$ . Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ .

**Definizione.** Sia  $\mathbf{p}$  un vettore di  $\mathbf{R}^3$ . La *traslazione*  $T_{\mathbf{p}}$  di passo  $\mathbf{p}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \\ x_3 + p_3 \end{pmatrix}.$$

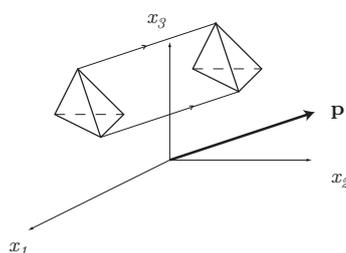


Fig.17. La traslazione di passo  $\mathbf{p}$ .

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

**Proposizione 6.1.**

- (i) Siano  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$ . Allora  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$ . In particolare, la composizione di due traslazioni è una traslazione.
- (ii) La traslazione  $T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.
- (iii) La traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  è l'inversa di  $T_{\mathbf{p}}$ , ossia  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}} = (T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}) = T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.

**Dimostrazione.** La dimostrazione è simile a quella della Prop.3.1 ed è lasciata al lettore.

Un'altra famiglia di trasformazioni di  $\mathbf{R}^3$  sono le *dilatazioni*.

**Definizione.** Siano  $\lambda, \mu, \rho \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda, \mu, \rho > 0$ . La dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  di  $\mathbf{R}^3$  è l'applicazione  $D_{\lambda, \mu, \rho} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$D_{\lambda, \mu, \rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \\ \rho x_3 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda, \mu, \rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se  $\lambda = \mu = \rho > 0$ , la dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  è semplicemente un "ingrandimento" o *omotetia* di fattore  $\lambda = \mu = \rho$ . In generale,  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  è un ingrandimento di fattore  $\lambda$  nella direzione dell'asse delle  $x_1$ , di fattore  $\mu$  nella direzione dell'asse delle  $x_2$  e di fattore  $\rho$  nella direzione dell'asse delle  $x_3$ .

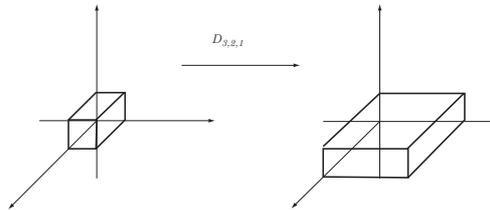


Fig.18. La dilatazione  $D_{3,2,1}$ .

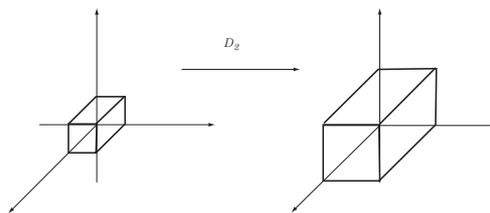


Fig.19. L'omotetia  $D_2$ .

Introduciamo adesso le *rotazioni* e le riflessioni in  $\mathbf{R}^3$ . La teoria è un po' più complicata di quella in  $\mathbf{R}^2$ . Cominciamo con le rotazioni e le riflessioni in forma standard e poi trattiamo il caso generale.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $R_\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  associa il vettore  $\mathbf{x}$  ruotato di un angolo  $\varphi$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Se  $\varphi > 0$ , la rotazione indotta sul piano  $(x_2, x_3)$  va intesa in senso antiorario (vedi Cap. 3). Se  $\varphi < 0$ , la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

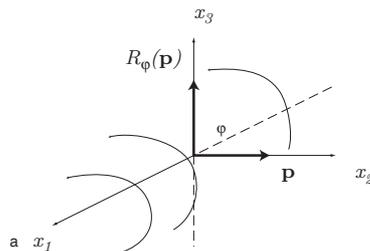


Fig.20. La rotazione  $R_\varphi$ .

**Teorema 6.2.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \cos(\varphi)x_2 - \sin(\varphi)x_3, \\ y_3 &= \sin(\varphi)x_2 + \cos(\varphi)x_3. \end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Questa formula segue dalla formula del Teorema 3.2 per la rotazione  $R_\varphi$  in  $\mathbf{R}^2$  di centro  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$  e angolo  $\varphi$ .

Per esempio, la rotazione  $R_{\pi/4}$  in  $\mathbf{R}^3$  è data da

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione.** Come ottenere le formule della rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad una retta arbitraria che passa per  $\mathbf{0}$ ? Inanzitutto, notiamo che il problema non è ben posto se la retta non è orientata: non è chiaro infatti in quale direzione si deve fare la rotazione. Se la retta è orientata, per fissare il *senso* della rotazione parleremo di *rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$*  con direzione e verso uguali a quelli della retta. Un metodo naturale per ottenere le formule di una rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  di angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$  diverso da  $\mathbf{e}_1$ , è il seguente.

Sia  $\mathbf{e}'_1$  un vettore parallelo a  $\mathbf{v}$  e di lunghezza 1. Scegliamo poi due vettori  $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$  di lunghezza 1, in modo che  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  siano ortogonali fra loro ed orientati positivamente. I vettori  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  formano in particolare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$ . I vettori  $\mathbf{e}'_2$  e  $\mathbf{e}'_3$  con queste proprietà possono essere scelti in infiniti modi. Siano  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$  le coordinate di un generico vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ , rispetto a questa base. Per il teorema 6.2, rispetto a questa base, la rotazione è data da

$$R_{\varphi, \mathbf{v}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cos(\varphi)x'_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x'_3 \\ \operatorname{sen}(\varphi)x'_2 + \cos(\varphi)x'_3 \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

dove

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

è la matrice rappresentativa corrispondente. Sia  $M$  la matrice del cambiamento di base dalla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ; le colonne di  $M$  sono i vettori della base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  espressi nella base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . La matrice rappresentativa  $A_{\varphi, \mathbf{v}}$  di  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  rispetto alla base canonica è data dunque da

$$A_{\varphi, \mathbf{v}} = MA'_\varphi M^{-1}.$$

**Esempio 6.3.** Calcoliamo le formule della rotazione di un angolo  $\pi/4$  intorno al vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale per  $\mathbf{R}^3$ , orientata positivamente. La matrice rappresentativa della rotazione  $R_{\pi/4}$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  è data da

$$A'_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  del cambiamento di base  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \rightarrow \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è data da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice rappresentativa  $A_{\pi/4}$  della rotazione rispetto alla base canonica è quindi data da

$$A_{\pi/4} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**Osservazione.** Come calcolare le formule della rotazione  $R$  di un angolo  $\varphi$  rispetto ad una retta orientata  $l$  che non passa per l'origine? La strategia è di traslare la retta  $l$  nell'origine, di ruotare di un angolo  $\varphi$  intorno ad un vettore  $\mathbf{v}$  con direzione e verso uguali ad  $l$ , e di ritraslare infine la retta "dov'era".

**Esempio 6.4.** Calcoliamo ad esempio la rotazione di un angolo  $\pi/3$  rispetto alla retta  $l$  di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cominciamo con una traslazione che porta  $l$  in una retta per l'origine  $\mathbf{0}$ . Per esempio la traslazione  $T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

di passo  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  porta  $l$  nella retta  $m$ , parallela ad  $l$  e passante per l'origine. La retta  $m$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e coincide con l'asse delle  $x_2$ . Fissiamo il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  parallelo ad  $m$ . Rispetto alla base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ , orientata positivamente, la matrice rappresentativa della rotazione  $R_{\pi/3}$  è data da

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$  alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa della rotazione intorno a  $\mathbf{v}$  risulta

$$R_{\pi/3, \mathbf{v}} = MR_{\pi/3}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad  $l$  sono quindi

$$R = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} R_{\pi/3, \mathbf{v}} T \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo adesso che la retta  $l$ , e quindi la retta  $m$ , abbia l'orientazione opposta. Il vettore  $\mathbf{v}' = -\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ha la direzione e il verso di  $m$ . In questo caso, la base  $\mathcal{B}'' = \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$  è ortonormale ed orientata positivamente ed il cambiamento di base da  $\mathcal{B}''$  alla base canonica è dato dalla matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base  $\mathcal{B}''$  la matrice rappresentativa della rotazione è ancora  $R_{\pi/3}$ , ma rispetto alla base canonica troviamo adesso la matrice

$$R_{\pi/3, \mathbf{v}'} = N R_{\pi/3} N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad  $l$  risultano quindi

$$R' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

**Definizione.** Sia  $S : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la riflessione rispetto al piano di equazione  $x_3 = 0$ . Abbiamo

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

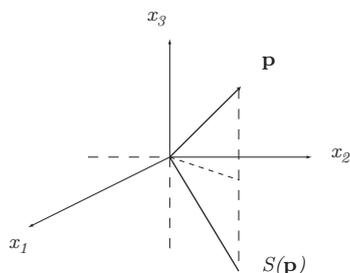


Fig.21. La riflessione  $S$  rispetto al piano  $x_3 = 0$ .

La riflessione rispetto ad una retta  $l$  è un particolare tipo di rotazione, precisamente la rotazione di un angolo di 180 gradi intorno alla retta stessa. In questo caso, il risultato non dipende dall'orientazione di  $l$ .

**Definizione.** La riflessione  $U$  rispetto all'origine  $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$  è data dalla formula

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

oppure, in notazione matriciale, da

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

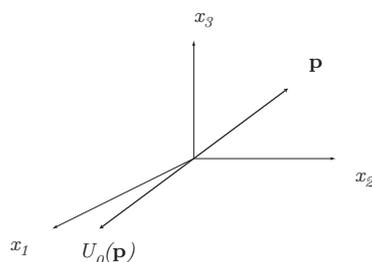


Fig.22. La riflessione  $U$  rispetto all'origine  $\mathbf{0}$ .

**Esempio.** (*riflessione rispetto ad un piano arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula per la riflessione  $S_\pi$  rispetto ad un arbitrario piano  $\pi$  mediante un esempio esplicito. Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$ . Sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  un punto arbitrario. La retta  $l$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è perpendicolare a  $\pi$  è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione  $l \cap \pi$  è un punto  $\mathbf{q}$  che corrisponde al valore del parametro

$$t = t_0 = \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}.$$

Siccome  $\mathbf{p}$  corrisponde a  $t = 0$ , il punto  $S_\pi(\mathbf{p})$ , simmetrico di  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\pi$ , corrisponde a  $t = 2t_0$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_\pi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2 \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

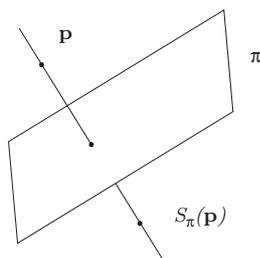


Fig.23. La riflessione  $S_\pi$  rispetto al piano  $\pi$ .

**Osservazione** In generale, la riflessione  $S_\pi$  rispetto ad un piano  $\pi$  non è un'applicazione lineare, ma è una applicazione lineare seguita da una traslazione. La riflessione  $S_\pi$  è lineare se e soltanto se  $\pi$  passa per l'origine  $\mathbf{0}$ .

**Esempio.** (*riflessione rispetto ad un punto arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula della riflessione rispetto ad un punto arbitrario, tramite un esempio esplicito. Sia  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$  un punto fissato e sia  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$  un punto arbitrario. Sia  $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$  il punto simmetrico di  $\mathbf{p}$  rispetto a  $\mathbf{q}$ . Poiché il centro di riflessione  $\mathbf{q}$  è il punto medio fra  $\mathbf{p}$  e  $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$  si ha che  $\mathbf{q} = 1/2(\mathbf{p} + U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}))$ . Di conseguenza

$$U_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = 2\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 - p_1 \\ -2 - p_2 \\ 4 - p_3 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione.** Tutte le trasformazioni lineari di  $\mathbf{R}^3$  mandano rette in rette e piani in piani. Lo stesso vale per le traslazioni e dunque per la composizione di trasformazioni lineari e traslazioni. Se  $M$  è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di  $\mathbf{R}^3$  ed  $r$  è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R},$$

la retta immagine di  $R$  tramite  $M$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se  $\pi$  è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

il piano immagine di  $\pi$  tramite  $M$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se  $T_{\mathbf{q}}$  è una traslazione di passo  $\mathbf{q}$  in  $\mathbf{R}^3$ , l'immagine di  $r$  tramite  $T_{\mathbf{q}}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R};$$

l'immagine di  $\pi$  tramite  $T_{\mathbf{q}}$  ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

**Osservazione.** Per concludere osserviamo che, in generale, una trasformazione lineare  $f$  di  $\mathbf{R}^3$  preserva l'orientazione se e soltanto se  $\det(f) > 0$ . Le rotazioni  $R_{\varphi, \mathbf{v}}$  preservano l'orientazione della base canonica di  $\mathbf{R}^3$  e le loro matrici rappresentative hanno sempre determinante uguale a 1. Le riflessioni  $S$  ed  $U$  invece cambiano l'orientazione della base canonica di  $\mathbf{R}^3$  e le loro matrici rappresentative hanno determinante uguale a  $-1$ . Le dilatazioni  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  preservano l'orientazione in quanto

$$\begin{aligned} \text{Or}(D_{\lambda, \mu, \rho}(\mathbf{v}), D_{\lambda, \mu, \rho}(\mathbf{w}), D_{\lambda, \mu, \rho}(\mathbf{u})) &= \text{Or} \left( \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \\ \rho v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \\ \rho w_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \mu u_2 \\ \rho u_3 \end{pmatrix} \right), \\ &= \lambda \mu \rho \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

**Esercizi.**

(6.A) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(i) Trovare le formule per la traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .

(ii) Calcolare  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(iii) Calcolare  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(iv) Calcolare  $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(6.B) Sia  $D_{2,5,3}$  la dilatazione data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(i) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  tale che  $D_{\lambda, \mu, \rho} \circ D_{2,5,3}$  sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  tale che  $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda, \mu, \rho}$  sia l'applicazione identica.

(6.C) Sia  $C$  il cubo in  $\mathbf{R}^3$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(ii) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(iii) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{3\pi/2}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(6.D) Sia  $C$  il cubo in  $\mathbf{R}^3$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $\mathbf{e}_3$ .

(ii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $\mathbf{e}_1$ .

(iii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $-\mathbf{e}_1$ .

(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

(6.E) Sia  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ .

- (i) Trovare le formule per la rotazione  $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$  di un angolo  $\pi/2$  intorno a  $\mathbf{v}$ .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione  $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$  di un angolo  $-\pi/4$  intorno a  $\mathbf{v}$ .
- (iii) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$  a  $l$ .

(iv) Sia  $\pi$  il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando  $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$  a  $\pi$ .

(6.F) Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 + 2x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a  $\pi$ .
- (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(6.G) Sia  $C$  il cubo dell'Eserc.6.C. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) al piano  $(x_1, x_2)$ .
- (ii) al piano  $(x_2, x_3)$ .
- (iii) al piano di equazione  $x_1 = x_2$ .

(6.H) Sia  $C$  il cubo dell'Eserc.6.D. Calcolare l'immagine di  $C$  dopo la riflessione rispetto

- (i) al piano  $(x_1, x_2)$ .
- (ii) al piano  $(x_2, x_3)$ .
- (iii) al piano di equazione  $x_1 = x_2$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\pi$  che mandano  $C$  in se stesso.

(6.I) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare la formula per la riflessione  $U_{\mathbf{p}}$  rispetto al punto  $\mathbf{p}$ .
- (ii) Calcolare la formula per la riflessione  $U_{\mathbf{q}}$  rispetto al punto  $\mathbf{q}$ .
- (iii) Calcolare le formule per la trasformazione  $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$  e per  $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ .
- (iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni  $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$  e  $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ ?

(6.J) Sia  $\pi$  il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia  $\pi'$  il piano di equazione  $x_3 = 0$ .

- (i) Trovare le formule della riflessione  $S_\pi$  rispetto a  $\pi$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S_{\pi'}$  rispetto a  $\pi'$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

(6.K) Dimostrare che una dilatazione  $D_{\lambda, \mu, \rho}$  conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se  $\lambda = \mu = \rho$ .