

4. Geometria di \mathbf{R}^3 .

Questo paragrafo è molto simile al paragrafo 1: tratta infatti delle proprietà geometriche elementari dello spazio \mathbf{R}^3 . Per assegnare delle *coordinate* nello spazio, fissiamo innanzitutto un punto $\mathbf{0}$, che chiamiamo *l'origine*. Scegliamo poi tre rette perpendicolari che si incontrano in $\mathbf{0}$: due rette “orizzontali” come assi delle x_1 e delle x_2 , e la terza “verticale” come asse delle x_3 . Fissiamo su di esse un verso ed un'unità di misura. Adesso, ad un arbitrario punto P dello spazio associamo una terna di numeri reali $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, che indicano rispettivamente le proiezioni di P sugli assi delle x_1 , x_2 e x_3 .

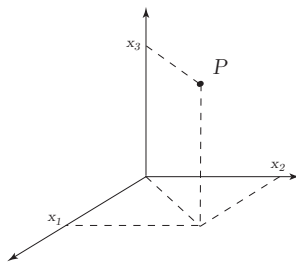


Fig.1. Il punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ nello spazio \mathbf{R}^3 .

Le coordinate x_1 , x_2 e x_3 individuano il punto P in modo unico. Si possono identificare quindi i punti P dello spazio con le terne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, i punti sull'asse delle x_1 sono quelli che soddisfano $x_2 = x_3 = 0$, i punti sull'asse delle x_2 quelli che soddisfano $x_1 = x_3 = 0$ e i punti sull'asse delle x_3 quelli che soddisfano $x_1 = x_2 = 0$. L'origine $\mathbf{0}$ è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme delle terne ordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si chiama “spazio cartesiano” e si indica con \mathbf{R}^3 :

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Nello spazio \mathbf{R}^3 , insieme agli assi coordinati, si considerano anche i piani coordinati: sono i tre piani ortogonali che si intersecano nell'origine, ognuno dei quali contiene due dei 3 assi coordinati. Essi sono: il piano (x_1, x_2) i cui punti soddisfano $x_3 = 0$, il piano (x_2, x_3) i cui punti soddisfano $x_1 = 0$ ed il piano (x_1, x_3) i cui punti soddisfano $x_2 = 0$.

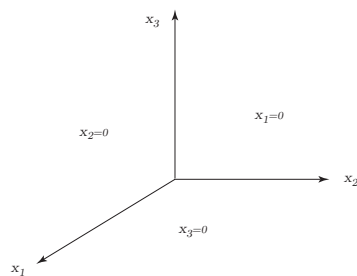


Fig.2. I piani coordinati in \mathbf{R}^3

Come nel caso del piano, indicheremo in seguito con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ anche il *vettore* \mathbf{x} uscente dall'origine e di estremo il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

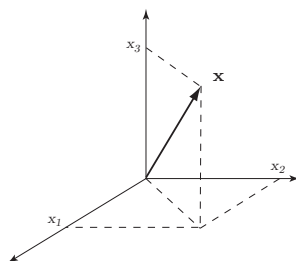


Fig.3. Il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo*. Per semplicità di notazione, scriveremo spesso \mathbf{x} sottintendendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; similmente scriveremo \mathbf{y} per $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, etc ...

Definizione. Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due vettori in \mathbf{R}^3 . Allora la *somma* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ di \mathbf{x} e \mathbf{y} è il vettore dato da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore \mathbf{x} è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

La *differenza* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ dei vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} è il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}$.

Definizione. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Il *prodotto* di \mathbf{x} per λ è il vettore dato da

$$\lambda \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Come nel piano, anche nello spazio la somma tra vettori ha un'interpretazione geometrica. Osserviamo che due vettori qualunque \mathbf{x} e \mathbf{y} in \mathbf{R}^3 sono contenuti in un piano π passante per $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} . Il vettore somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ si trova applicando la regola del parallelogramma ai vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} sul piano π . Per costruzione, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è contenuto nel piano π . Resta solo da verificare che le coordinate di $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ così ottenute sono effettivamente

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Anche in \mathbf{R}^3 , il vettore differenza $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è parallelo alla retta passante per \mathbf{x} e \mathbf{y} ; la lunghezza di $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è uguale alla distanza fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

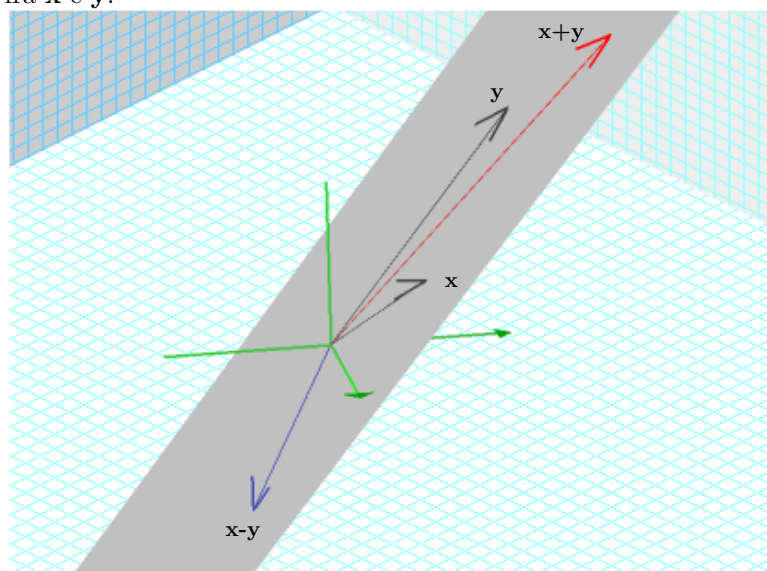


Fig.4. La somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, la differenza $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Osservazione. La costruzione appena discussa è utile perché riconduce la somma di vettori nello spazio ad una somma di vettori sul piano. Ci permette inoltre di definire l'angolo ϑ fra due vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} dello spazio,

come l'angolo da essi formato nel piano π che li contiene. Nel caso in cui \mathbf{x} e \mathbf{y} sono uno multiplo dell'altro, il piano π non è unico ed i vettori \mathbf{x} , \mathbf{y} , $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ stanno tutti sulla stessa retta. In questo caso, l'angolo fra \mathbf{x} e \mathbf{y} è $\vartheta = 0$.

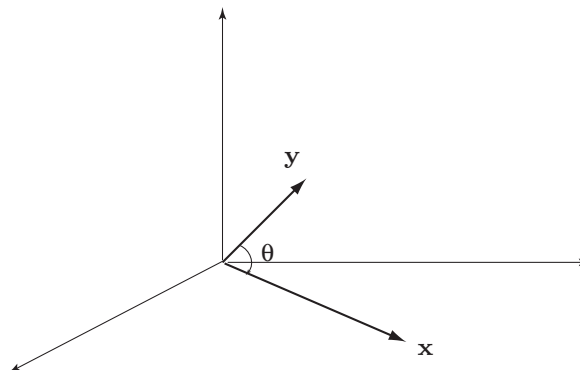


Fig.5 L'angolo ϑ fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

La somma fra vettori gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 4.1.

(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Anche in questo caso, le proprietà (i), (ii), (iii) e (iv) sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

Definizione. (Prodotto scalare.) Dati due vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} in \mathbf{R}^3 il *prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ è il numero reale dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

Dimostrazione. Sia π un piano che passa per $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} . Consideriamo in π il triangolo di vertici i punti $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} . Dalla Fig.4, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Applicando la regola del coseno troviamo

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$

e quindi

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$$

come richiesto. Per la parte (ii), osserviamo che $\cos\varphi = 0$ se e soltanto se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè se e soltanto se φ è un angolo retto.

Corollario 4.4. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} vettori in \mathbf{R}^3 . Allora

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che $|\cos\varphi| \leq 1$. (Vedi l'Eserc.1.B).

Proposizione 4.5. Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} vettori in \mathbf{R}^3 . Allora

(i) (Disuguaglianza triangolare)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$

(ii) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Dimostrazione. (i) Sia π un piano che passa per $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} . In π c'è il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Poiché i lati hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$, la disuguaglianza triangolare in \mathbf{R}^3 segue dalla disuguaglianza triangolare nel piano. Una seconda dimostrazione dello stesso fatto si può ottenere anche usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.4.4:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Poiché $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate ottenendo la disuguaglianza cercata.

(ii) Direttamente dalla definizione della norma troviamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Estraendo le radici quadrate, otteniamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$$

come richiesto.

Come applicazione del prodotto scalare, calcoliamo le proiezioni ortogonali di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ su una retta l o su un piano β , passanti per l'origine.

Proposizione 4.6. Sia \mathbf{x} un vettore in \mathbf{R}^3 .

(i) La proiezione ortogonale $\pi(\mathbf{x})$ di \mathbf{x} sulla retta l passante per l'origine e parallela al vettore $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ è data da

$$\pi(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}, \quad \text{ove } c = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2};$$

(ii) La proiezione ortogonale $\pi(\mathbf{x})$ di \mathbf{x} sul piano β passante per l'origine di equazione $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ è data da

$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda \mathbf{n}, \quad \text{ove } \lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}.$$

Dimostrazione. (i) La dimostrazione è del tutto simile a quella della Proposizione 1.6 ed è lasciata al lettore.

(ii) Sia $\pi(\mathbf{x})$ la proiezione ortogonale di \mathbf{x} sul piano β . Allora $\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})$ è un vettore perpendicolare a β e dunque soddisfa

$$\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{n}$$

per un opportuno scalare λ . Poiché $\pi(\mathbf{x})$ appartiene a β vale $\mathbf{n} \cdot \pi(\mathbf{x}) = 0$, da cui si ricava $\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ e quindi

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

come richiesto.

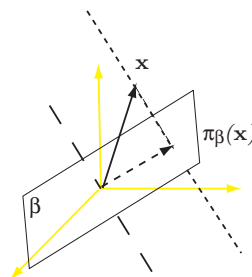


Fig.7. La proiezione ortogonale del vettore \mathbf{x} sul piano β .

Introduciamo adesso il *prodotto vettoriale* in \mathbf{R}^3 : si noti che il *prodotto vettoriale* non è definito nel piano \mathbf{R}^2 , né in \mathbf{R}^n per $n > 3$. È una nozione che *esiste solo in \mathbf{R}^3* . Il *prodotto vettoriale* è un'applicazione che ad una coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ associa un terzo vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$.

Definizione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di \mathbf{x} e \mathbf{y} è il vettore di \mathbf{R}^3 definito da

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 4.7. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ gode delle seguenti proprietà:

(i)

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y};$$

(ii) Il vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ è perpendicolare sia ad \mathbf{x} che a \mathbf{y} :

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0;$$

(iii) La norma di $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ soddisfa

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| |\sin \varphi|,$$

dove φ è l'angolo fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Dimostrazione. (i) Direttamente dalla definizione, abbiamo

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Per dimostrare (ii), calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \end{aligned}$$

Similmente troviamo $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$.

Per la parte (iii) abbiamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \varphi &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\ &= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate, troviamo l'uguaglianza cercata. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Proposizione 4.8. Il parallelepipedo di spigoli i vettori \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} ha volume V dato da

$$\begin{aligned} V &= |x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3 - z_1y_2x_3| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il volume V del parallelepipedo di spigoli \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} è uguale all'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, \mathbf{x} , \mathbf{y} e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ moltiplicata per l'altezza. L'altezza è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore \mathbf{z} sulla retta che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

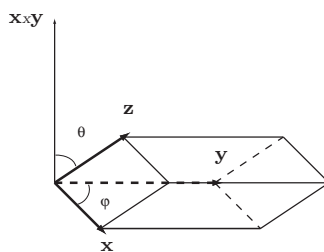


Fig.8. Il parallelepipedo di spigoli \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .

Per la Prop.1.7, l'area del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\varphi$, ove φ è l'angolo fra i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} , e la lunghezza della proiezione di \mathbf{z} sulla retta per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ è uguale a $\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta$, ove ϑ è l'angolo fra i vettori \mathbf{z} e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$. Il volume V è quindi dato da

$$\begin{aligned} V &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\sin\varphi\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta \\ &= \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\|\cos\vartheta \\ &= \|\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})\| \\ &= |z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)|. \end{aligned}$$

Osserviamo infine che l'espressione $z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$ coincide col determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

e ciò completa la dimostrazione della Proposizione.

Definizione. L'*orientazione* $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ di tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Si dice che $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono orientati *positivamente* se $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$.

Per esempio, i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{e}_3 sono orientati positivamente perchè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

Scambiare due vettori cambia il segno dell'orientazione:

$$\text{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Geometricamente, tre vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{z} sono orientati positivamente se possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano destra. Altrimenti sono orientati negativamente e possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano sinistra.

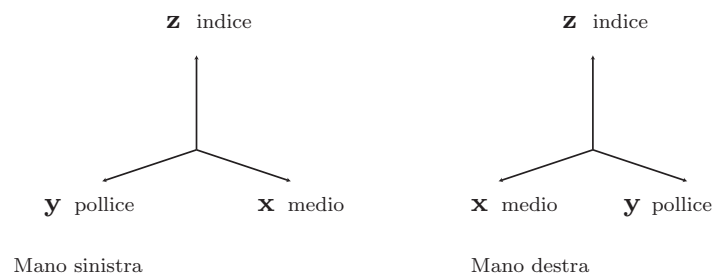


Fig.9. L'orientazione.

Osservazione. I vettori $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$ formano una terna di vettori orientata positivamente.

Esercizi.

(4.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ due vettori in \mathbf{R}^3 .

- (i) Calcolare $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ e $-2\mathbf{x} + \mathbf{y}$.
- (ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.

(4.B) Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} i vettori dell'Eserc.4.A.

- (i) Calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ e anche $\mathbf{x} \cdot (5\mathbf{x} + 7\mathbf{y})$.
- (ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .
- (iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

(4.C) Sia \mathbf{x} il vettore dell'Eserc.4.A.

- (i) Trovare un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$.
- (ii) Trovare un vettore $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \end{cases}$$

(4.D) Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $\lambda = \|\mathbf{v}\|$.

- (i) Calcolare la lunghezza di $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
- (ii) Trovare un vettore parallelo a \mathbf{v} che abbia lunghezza $1/\lambda$.

(4.E) Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due vettori in \mathbf{R}^3 . Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \\ (x_3 + y_3)/2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le distanze $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$.
- (ii) Far vedere che \mathbf{v} è il punto medio fra \mathbf{x} e \mathbf{y} .

(4.F) Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} i due vettori dell'Eserc.4.A.

- (i) Calcolare $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
- (ii) Calcolare $\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})$.
- (iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, \mathbf{x} e \mathbf{y} .

(4.G) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare un vettore \mathbf{v} perpendicolare sia a \mathbf{x} che a \mathbf{y} .
- (ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.

(4.H) Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .
- (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, \mathbf{y} e \mathbf{z} .
- (iii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, \mathbf{y} e \mathbf{z} .
- (iv) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + 7\mathbf{z}$, \mathbf{y} e \mathbf{z} .

(4.I) Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} i vettori in \mathbf{R}^3 dati da

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le lunghezze di \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} e i coseni degli angoli fra \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .
- (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + 7\mathbf{z}$, \mathbf{y} e \mathbf{z} .

(4.J) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare i vettori $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$ ed $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$.
 - (ii) Calcolare $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ ed $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$.
- (4.K) Siano \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} i vettori dell'Eserc.4.H.
- (i) Calcolare l'orientazione $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.
 - (ii) Calcolare l'orientazione $\text{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$.
 - (iii) Calcolare l'orientazione $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})$.
- (4.L) Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_8 \in \mathbf{R}^3$ gli otto punti in \mathbf{R}^3 dati da

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Far vedere che $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ e \mathbf{x}_4 sono i vertici di un parallelogramma.
 - (ii) Far vedere che $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_{i+4}$ per ogni $i, 1 \leq i \leq 4$.
 - (iii) Far vedere che $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_8$ formano i vertici di un parallelepipedo. Calcolarne il volume.
- (4.M) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ e supponiamo che $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = +1$.
- (i) Far vedere che i vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} e \mathbf{z} si possono mettere in ordine in *sei* modi diversi: $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}$ oppure $\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ ecc.
 - (ii) Per tutti i sei modi calcolare l'orientazione: $\text{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$, $\text{Or}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \dots$ ecc.
- (4.N) Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ numeri non nulli che soddisfano $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Consideriamo i seguenti vettori in \mathbf{R}^3 :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\gamma \\ \gamma\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\alpha \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ \alpha\beta \\ \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare gli angoli fra i vettori \mathbf{p}, \mathbf{q} e \mathbf{r} .
- (ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori \mathbf{p}, \mathbf{q} e \mathbf{r} .