3. Trasformazioni geometriche di $\mathbf{R}^2$.

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche del piano $\mathbf{R}^2$. Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Le trasformazioni del piano si possono *comporre* tra loro: se f e g sono due applicazioni bigettive da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$, allora la composizione $f \circ g$, definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$. Nota bene che $f \circ g$ si legge "f *composto* g", a indicare che prima si applica g al vettore $\mathbf{x}$ e poi si applica f al vettore $g(\mathbf{x})$. In generale, $f \circ g$ è diversa dall'applicazione $g \circ f$.

La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa:*

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

Definizione. Sia $\mathbf{p}$ un vettore di $\mathbf{R}^2$. La *traslazione* $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p}$ è l'applicazione $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}.$$

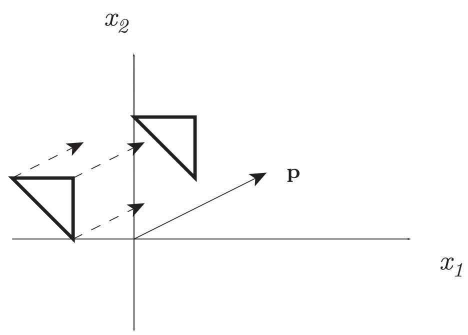

Fig.23 La traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 3.1.
(i) Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$. Allora $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$. In particolare, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.
(ii) La traslazione $T_{\mathbf{0}}$ è l'applicazione identica.
(iii) La traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ è l'inversa di $T_{\mathbf{p}}$.

Dimostrazione. *(i)* Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, vale

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = (T_{\mathbf{p}}(T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})) = T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} + \mathbf{q}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{x}).$$

D'altra parte, per la commutatività della somma fra vettori, vale anche

$$\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{x} + \mathbf{q} + \mathbf{p} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}).$$

(ii) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, si ha che

$$T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

ossia $T_{\mathbf{0}}$ è proprio l'applicazione identità di $\mathbf{R}^2$.
(iii) Dal punto (i) segue che

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

cioè $T_{\mathbf{p}}$ e $T_{-\mathbf{p}}$ sono una l'inversa dell'altra.

Un'altra famiglia di trasformazioni di $\mathbf{R}^2$ sono le *dilatazioni.*

Definizione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$. La dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ di $\mathbf{R}^2$ è l'applicazione $D_{\lambda,\mu} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

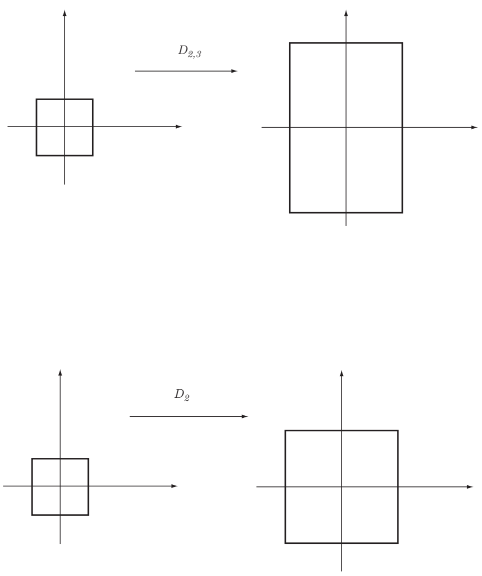

Fig.24 La dilatazione $D_{2,3}$ e l'omotetia D_2.

Se $\lambda = \mu > 0$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ è semplicemente un "ingrandimento" di fattore $\lambda = \mu$. Se λ e μ sono numeri positivi distinti, $D_{\lambda,\mu}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell'asse delle ascisse e di fattore μ nella direzione dell'asse delle ordinate.

Introduciamo adesso la famiglia delle *rotazioni.*

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_\varphi\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ dopo la rotazione di un angolo φ intorno all'origine. Se $\varphi > 0$, la rotazione va intesa in senso "antiorario". Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

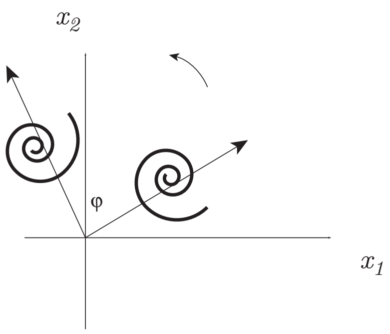

Fig.25 La rotazione R_φ.

Teorema 3.2. *Sia* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ *e sia* $\varphi \in \mathbf{R}$. *Le coordinate del punto* $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ *sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\varphi x_1 - \operatorname{sen}\varphi x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}\varphi x_1 + \cos\varphi x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore $\mathbf{x}$ e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos\alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Il vettore $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $\varphi + \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi+\alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi \cos\alpha - \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(\varphi+\alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos\alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ di centro $\mathbf{0}$ e di angolo $\varphi = \pi/4$ è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Le rotazioni godono delle seguenti proprietà.

Proposizione 3.3.

(i) La composizione di due rotazioni R_φ *e* R_ψ *intorno all'origine è una rotazione di angolo* $\varphi + \psi$*:*

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\psi \circ R_\varphi.$$

(ii) La rotazione di un angolo $\varphi = 0$ *è l'applicazione identica, ossia* $R_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$.

(iii) La rotazione inversa di R_φ *è* $R_{-\varphi}$.

Dimostrazione. Tutte queste proprietà sono geometricamente evidenti, ma si possono anche ottenere dalle formule del Teorema 3.2.

Problema. Come ottenere le formule di una rotazione $R_{\varphi,\mathbf{p}}$ di angolo φ intorno ad un punto $\mathbf{p}$ diverso dall'origine? Un modo di procedere è il seguente: prima si fa una traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p}$, che porti il punto $\mathbf{p}$ in $\mathbf{0}$; poi si fa una rotazione R_φ intorno a $\mathbf{0}$ e poi si fa una traslazione $T_\mathbf{p}$ che riporti $\mathbf{0}$ in $\mathbf{p}$:

$$R_{\varphi,\mathbf{p}} = T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}.$$

In coordinate

$$T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T_\mathbf{p}(R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}) = T_\mathbf{p}(\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.4. Calcoliamo, ad esempio, le formule della rotazione $R_{\varphi,\mathbf{p}}$ di un angolo φ attorno al punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\varphi,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= T_\mathbf{p} \begin{pmatrix} \cos\varphi(x_1 - 5) - \operatorname{sen}\varphi(x_2 - 4) \\ \operatorname{sen}\varphi(x_1 - 5) + \cos\varphi(x_2 - 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x_1 - 5) - \operatorname{sen}\varphi(x_2 - 4) + 5 \\ \operatorname{sen}\varphi(x_1 - 5) + \cos\varphi(x_2 - 4) + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Introduciamo infine le *riflessioni.*

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $S_\varphi: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ dopo la riflessione rispetto alla retta che passa per $\mathbf{0}$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.

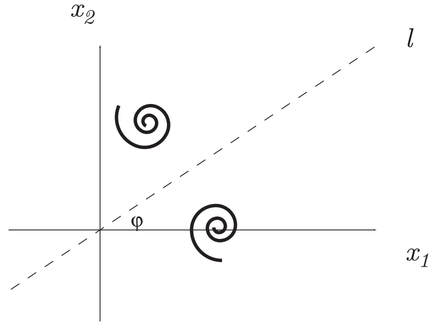

Fig.26 La riflessione S_φ.

Teorema 3.5. *Sia* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ *e sia* $\varphi \in \mathbf{R}$*. Le coordinate del punto* $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ *sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\varphi)x_1 + \operatorname{sen}(2\varphi)x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}(2\varphi)x_1 - \cos(2\varphi)x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore $\mathbf{x}$ e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos\alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Si vede dalla Fig.28 che il vettore $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $2\varphi - \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi - \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi)\cos\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}\alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi - \alpha) = -\|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi)\operatorname{sen}\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi)\cos\alpha. \end{aligned}$$

La sostituizione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos\alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la retta l data da $x_1 = x_2$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad l è l'applicazione $S_{\pi/4}$ data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.6.

(i) La composizione $S_\varphi \circ S_\varphi$ *è l'applicazione identica.*

(ii) La composizione $S_\varphi \circ S_\psi$ *di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per* $\mathbf{0}$ *(con* $\varphi \neq \psi$*) è una rotazione di angolo* $2(\varphi - \psi)$*.*

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} (S_\varphi \circ S_\psi)(\mathbf{x}) &= \left(\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\psi) & \operatorname{sen}(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\psi) & -\cos(2\psi) \end{pmatrix} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi)\cos(2\psi) + \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) & \cos(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) - \operatorname{sen}(2\varphi)\cos(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi)\cos(2\psi) - \cos(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) & \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) + \cos(2\varphi)\cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\varphi - \psi)) & -\operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) \\ \operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) & \cos(2(\varphi - \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= R_{2(\varphi - \psi)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In particolare, se $\varphi = \psi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ otteniamo l'applicazione identità.

Osservazione. Dalle formule del teorema precedente si vede anche che, in generale,

$$S_\varphi \circ S_\psi \neq S_\psi \circ S_\varphi.$$

Osservazione. Se $\varphi = 0$, l'applicazione S_0 è una riflessione rispetto all'asse delle ascisse; se $\varphi = \pi/2$, l'applicazione $S_{\pi/2}$ è una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

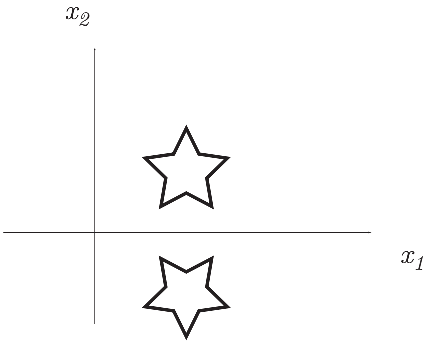

Fig.27 La riflessione rispetto all'asse delle ascisse S_0.

La composizione delle riflessioni S_0 ed $S_{\pi/2}$ è una rotazione di angolo π, ossia la riflessione rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

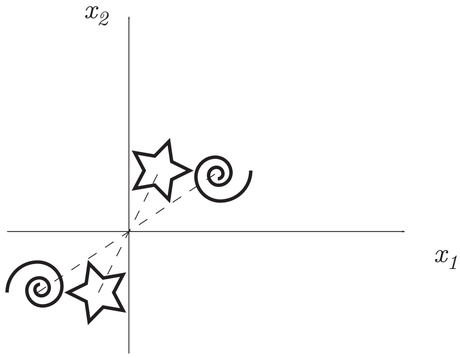

Fig.28 La riflessione rispetto all'origine $R_\pi = S_0 \circ S_{\pi/2}$.

Problema. Come calcolare le formule della riflessione S rispetto ad una retta l che non passa per l'origine? Se la retta l non passa per l'origine, non possiamo usare direttamente le formule del Teorema 3.5, ma possiamo procedere nel seguente modo. Fissiamo un punto arbitrario $\mathbf{p}$ sulla retta l e applichiamo la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$. La trasformata della retta l, tramite $T_{-\mathbf{p}}$, è la retta l', parallela ad l e passante per $\mathbf{0}$; applichiamo adesso la riflessione S_φ rispetto ad l', ove φ è l'angolo formato da l' con l'asse delle ascisse. Applichiamo infine la traslazione inversa $T_{\mathbf{p}}$, che "riporta la retta l al suo posto". In totale, la riflessione rispetto ad l è data dalla composizione

$$S = T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}$$

e non dipende dalla scelta di $\mathbf{p} \in l$. In coordinate

$$T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}}(S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}) = T_{\mathbf{p}}(\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 3.7. Calcoliamo ad esempio la riflessione rispetto alla retta l di equazione $x_1 + 1 = 0$. Il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad l e quindi la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta l', ad essa parallela e passante per l'origine. l' è data dall'equazione $x_1 = 0$ e forma un angolo uguale a $\pi/2$ con l'asse delle ascisse. La trasformazione cercata è data dunque dalla composizione

$$S = T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\binom{1}{0}}.$$

In coordinate S risulta

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\binom{1}{0}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Concludiamo questo paragrafo introducendo l'orientazione di una coppia di vettori in $\mathbf{R}^2$.

Definizione. *L'orientazione* $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di una coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$ è il *segno* del determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

In altre parole

$$\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0; \\ 0 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0; \\ -1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 < 0. \end{cases}$$

Si dice che una coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è orientata *positivamente* se $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$. Geometricamente, ciò accade se, ruotando il vettore $\mathbf{v}$ in senso antiorario fino a sovrapporlo alla retta passante per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{w}$, allora $\mathbf{v}$ ha la stesso verso di $\mathbf{w}$ (e non quello opposto).

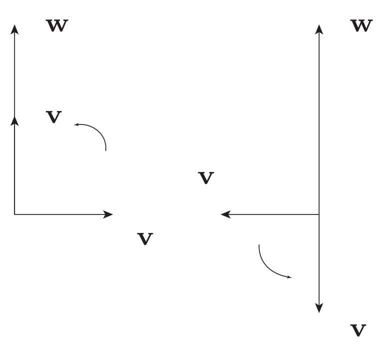

Fig.29 Orientazione.

L'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *cambia* se cambia l'ordine dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Si ha infatti che

$$\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathrm{Or}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Siano $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora si ha che

$$\mathrm{Or}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = +1, \qquad \mathrm{Or}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -1.$$

Una qualunque rotazione R_φ conserva l'orientazione di ogni coppia di vettori. Si dice anche che le rotazioni conservano l'orientazione del piano. Una riflessione, invece, cambia l'orientazione di ogni coppia di vettori. Una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu > 0$ conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \mathrm{Or}\left(\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \end{pmatrix}\right), \\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2, \\ &= \lambda\mu \mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

In generale, un'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ conserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$.

Esercizi.

(3.A) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(3.B) Sia Q il trapezio in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la traslazione $T_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}$.

(ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la dilatazione $D_{2,2}$ data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la riflessione S_0 data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iv) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π data dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3.C) Sia $D_{2,5}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$ sia l'applicazione identica.

(3.D) Per quali dilatazioni $D_{\lambda,\mu}$ abbiamo che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$ è l'applicazione identica?

(3.E) Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π.

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$.

(3.F) Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
(ii) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato in se stesso?
(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.

(3.G) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti di $\mathbf{R}^2$ di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda l'esagono di vertici $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ in se stesso?

(3.H) Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(i) Trovare le formule per la rotazione R di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $\pi/2$.
(ii) Trovare le formule per la rotazione R' di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $-\pi/4$.
(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R ad l.
(iv) Sia m la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R' ad l.

(3.I) Sia l la retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad l.
(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(3.J) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3.E. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto
(i) all'asse delle ascisse.
(ii) all'asse delle ordinate.
(iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.

(3.K) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3.F. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto
(i) all'asse delle ascisse.
(ii) all'asse delle ordinate.
(iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.
(iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano Q in se stesso.

(3.L) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti dell'Eserc.3.G. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici Q_i dopo la riflessione rispetto
(i) all'asse delle ascisse.
(ii) all'asse delle ordinate.
(iii) la retta di equazione $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$.
(iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano l'esagono in se stesso.

(3.M) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.
(i) Calcolare la tangente dell'angolo φ formato da l con l'asse delle ascisse.

(ii) Calcolare le formule per S.

(3.N) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule della riflessione S_0 rispetto all'asse delle ascisse.
(ii) Determinare se
$$S = R_{-\varphi} \circ S_0 \circ R_\varphi.$$
(Suggerimento: calcolare le formule per R_φ e per S).

(3.O) Sia l la retta di equazione parametrica
$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$
e sia m la retta di equazione $x_1 = 0$.
(i) Trovare le formule della riflessione S rispetto ad l.
(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.
(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta
$$S \circ S'.$$
(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta
$$S' \circ S.$$
(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(3.P)) Sia l la retta di equazione $x_1 = 1$ e sia m la retta di equazione $x_2 = 2$.
(i) Calcolare le formule della riflessione S rispetto ad l.
(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.
(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta
$$S \circ S'.$$
(iv) Calcolare le formule della trasformazione composta
$$S' \circ S.$$
(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(3.Q) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
(ii) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$.
(iii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare $\mathrm{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$.
(iv) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per $\mathbf{0}$ e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $\mathrm{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$.

(3.R) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(i) Sia $R_{\pi/2}$ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/2$. Calcolare $\mathrm{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$.
(ii) Sia R_φ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo φ. Calcolare $\mathrm{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$.

(3.S) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Siano $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(t)}$ le riflessioni rispetto a delle rette passanti per $\mathbf{0}$. Sia $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \ldots \circ S^{(t)}$. Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$.