1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo.
   (a) Verificare che l'elemento neutro e di G è unico.
   (b) Verificare che per ogni $x \in G$, l'inverso x^{-1} di x in G è unico.

2. (*prodotto diretto di gruppi*) Siano $(G_1, e_1, \circ)$ e $(G_2, e_2, *)$ due gruppi.
   (a) Verificare che il prodotto cartesiano $G_1 \times G_2$, col prodotto definito da $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 * y_2)$, è un gruppo.
   (b) Determinare l'elemento neutro di $G_1 \times G_2$ rispetto al prodotto così definito.
   (c) Determinare l'inverso di $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$ rispetto al prodotto così definito.
   (d) Verificare che se G_1 e G_2 sono abeliani, anche $G_1 \times G_2$ è abeliano.
   (e) Siano $(G_1, e_1, \circ) = (\mathbf{Z}_2, \bar{0}, +)$ e $(G_2, e_2,) = (\mathbf{Z}_3, \bar{0}, +)$. Scrivere la tabella moltiplicativa del gruppo $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, +)$.

3. Siano $(G_1, \cdot)$ e $(G_2, \cdot)$ due gruppi e sia $\varphi : G_1 \to G_2$ un isomorfismo di gruppi, ossia una applicazione biiettiva da G_1 a G_2 tale che $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, per ogni $g, h \in G_1$.
   (a) Verificare che $\varphi(e_1) = e_2$, dove e_1 ed e_2 sono rispettivamente l'elemento neutro di G_1 e l'elemento neutro di G_2.
   (b) Verificare che per ogni $x \in G_1$, l'inverso di $\varphi(x)$ in G_2 è dato da $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.
   (c) Verificare che l'ordine di x in G_1 è uguale all'ordine di $\varphi(x)$ in G_2.

4. Considerare i seguenti gruppi di ordine 4:
   (a) $A = \{1, -1, i, -i\}$ con l'operazione data dalla moltiplicazione fra numeri complessi.
   (b) $\mathbf{Z}_4$ con la somma fra classi resto.
   (c) $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ con la somma definita da $(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{u}, \bar{v}) = (\overline{x+u}, \overline{y+v})$.
   (d) $\mathbf{Z}_5^*$ col prodotto fra classi resto.
   (e) $\mathbf{Z}_{12}^*$ col prodotto fra classi resto.
   (f) $\mathbf{Z}_8^*$ col prodotto fra classi resto.

   (1) Scrivere le rispettive tabelle moltiplicative e determinare quali di essi sono isomorfi tra loro.
   (2) Quali di essi contengono un elemento di ordine 4?

5. Sia $n \in \mathbf{N}$. L'ordine $\mathrm{ord}_n(\bar{x})$ di $\bar{x} \in \mathbf{Z}_n^*$ è il più piccolo $r > 0$ tale che $\bar{x}^r = \bar{1}$ in $\mathbf{Z}_n^*$.
   (a) Sia $n = 7$. Calcolare $\mathrm{ord}_n(\bar{x})$ per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_n^*$.
   (b) Sia n primo. Dimostrare che $\mathrm{ord}_n(\bar{x})$ divide $n - 1$ per ogni $\bar{x} \in \mathbf{Z}_n^*$.
   (c) Sia $n \in \mathbf{N}$. Calcolare l'ordine di $\overline{-1}$ in $\mathbf{Z}_n^*$.

6. Siano n, m interi positivi con $\gcd(n, m) = 1$. Abbiamo dimostrato che l'applicazione biiettiva

$$\varphi : \mathbf{Z}_{nm} \to \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m, \quad \bar{x} \mapsto (\bar{x} \pmod n, \bar{x} \pmod m)$$

   è un isomorfismo di gruppi. Ne segue che, se $\gcd(n, m) = 1$, il prodotto diretto $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m$ è un gruppo ciclico di ordine nm.
   (a) Determinare un elemento di ordine nm in $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m$.
   (b) Determinare gli elementi di ordine 6 in $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \cong \mathbf{Z}_6$.

7. Siano n, m interi positivi con $\gcd(n, m) > 1$.
   (a) Verificare che in $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m$ non ci sono elementi di ordine nm (suggerimento: sfruttare il fatto che in questo caso $\mathrm{mcm}(n, m) < nm$ e calcolare

$$(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots + (\bar{x}, \bar{y}) = (??, ??), \quad \mathrm{mcm}(n, m)\text{-volte}.$$

Ne segue che, se $\gcd(n, m) > 1$, il prodotto diretto $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_m$ non è un gruppo ciclico.

(b) Verificare che non ci sono elementi di ordine 9 in $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$.

(c) Verificare che non ci sono elementi di ordine 12 in $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_6$.

Il prototipo del gruppo ciclico di ordine n è il gruppo additivo $(\mathbf{Z}_n, +)$. Vedremo che in un gruppo ciclico di ordine n vale il seguente fatto:

Per ogni divisore d di n, ci sono $\varphi(d)$ elementi di ordine d. (*)

8. Verificare (*) nel caso del gruppo $(\mathbf{Z}_{12}, +)$ e del gruppo $\mathbf{Z}_{15}$ (magari fare i conti con Pari/Gp).

9. Sia $p \in \mathbf{N}$ un numero primo. Verificare che in $\mathbf{Z}_p$ vale l'uguaglianza $(\bar{x} + \bar{y})^p = \bar{x}^p + \bar{y}^p$, per ogni $\bar{x},\ \bar{y} \in \mathbf{Z}_p$ (suggerimento: usare la formula di Newton).
Verificare che per $n = 4$, tale uguaglianza non vale.

10. Dimostrare che $\sum_{\bar{x} \in \mathbf{Z}_n} \bar{x} = \bar{0}$ in $\mathbf{Z}_n$, per ogni n dispari.

11. Calcolare $(p-1)!$ in $\mathbf{Z}_p$, per p primo.

12. Sia G un gruppo tale che $g^2 = e$, per ogni $g \in G$. Dimostrare che G è abeliano.