

1. Calcolare la tabella dei numeri primi  $p < 200$ .
2. Fattorizzare come prodotto di numeri primi i seguenti numeri: 100, 10!, 101, 1001, 10001 e il coefficiente binomiale  $\binom{50}{25}$ .
3. (Numeri di Mersenne). Per ogni numero naturale  $n$ , si definisce l'ennesimo numero di Mersenne come  $M_n = 2^n - 1$ .
  - (a) Fattorizzare  $M_n$  per  $1 \leq n \leq 12$ ;
  - (b) Dimostrare: se  $M_n$  è primo, allora  $n$  è primo;
  - (c) Far vedere che il viceversa di (b) non vale;(si veda <http://mathworld.wolfram.com/MersenneNumber.html>)
4. (Numeri di Fermat) Per ogni numero naturale  $n$ , si definisce l'ennesimo numero di Fermat come  $F_n = 2^{2^n} + 1$ .
  - (a) Dimostrare: se  $2^m + 1$  è primo, allora  $m$  è potenza di 2;
  - (b) Far vedere che  $F_n$  è primo per  $1 \leq n \leq 4$ ;(si veda <http://mathworld.wolfram.com/FermatNumber.html>)
5. Siano  $n$  ed  $A$  interi positivi. Supponiamo che  $\frac{A}{n}$  sia "sufficientemente piccolo". Verificare che la percentuale di numeri primi nell'intervallo  $[n - A, n + A]$  è circa  $\frac{1}{\ln n}$ , dove  $\ln n$  indica il logaritmo in base  $e$  di  $n$ .
6. Sia  $n$  un numero di 100 cifre decimali. Stimare la percentuale di numeri primi in un intervallo  $[n - A, n + A]$ , con  $A$  numero di 50 cifre.
7. Verificare che per  $n = 10^8$  ed  $A = 150000$  l'intervallo  $[n, n + A]$  contiene circa 8142 numeri primi.
8. Siano  $B = 2$  e  $B = 3$ . Chi sono i numeri 2-smooth e i numeri 3-smooth? Elencare i primi 10 numeri 2-smooth e i primi 15 numeri 3-smooth. Verificare che sono infiniti e che crescendo si diradano.
9. Sia  $B = 6$ . Chi sono i numeri  $B$ -smooth? Elencare i primi 15 numeri 6-smooth.
10. Sia  $B$  un intero positivo fissato. Siano  $n$  ed  $A$  interi con  $\frac{A}{n}$  "sufficientemente piccolo". Verificare che la percentuale di numeri  $B$ -smooth nell'intervallo  $[n - A, n + A]$  è data approssimativamente da  $u^{-u}$ , dove  $u$  è determinato dalla condizione  $n^{1/u} = B$ .
11. Sia  $B = 1000$  e sia  $A = 10^{10}$ . Stimare la percentuale di interi  $B$ -smooth compresi nell'intervallo  $[10^{20} - A, 10^{20} + A]$ .
12. Sia  $n$  un numero di 100 cifre decimali e sia  $B$  un numero di 10 cifre. Stimare la percentuale di interi  $B$ -smooth in un intervallo  $[n - A, n + A]$ , con  $A$  numero di 50 cifre.
13. [PC, Es.1.68 ] Verificare che ci sono esattamente 35084 numeri 4-smooth minori di  $10^{100}$ .