GEOMETRIA 2 Ingegneria Meccanica L.S. (Geatti) 1° esonero Roma 3 febbraio 2005, 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Siano dati il sottospazio* $V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+y-z=0 \\ u=o \end{cases} \}$ *e il punto* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbb{R}^4$. *Calcolare la distanza di* P *da* V.

Per definizione la distanza di P da V è la distanza di P dalla sua proiezione ortogonale su V:

$$d(P,V) = d(P, \pi_V(P).$$

Per calcolare la proiezione ortogonale di P su V abbiamo bisogno di una base ortonoramale di V:

$$V = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} = span\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

dove la seconda base (ortonormale) è stata ottenuta dalla prima col metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. La proiezione ortogonale di P su V è data da

$$\pi_V(P) = (P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (P \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}) \frac{\sqrt{6}}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine la distanza cercata è data da

$$d(P, \pi_V(P) = \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2. *Sia* $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'applicazione data da* $F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ -y \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{pmatrix}$.
   (i) Dimostrare che F *è un'isometria.*
   (ii) Scrivere F *come la composizione di una riflessione rispetto ad un piano e di una rotazione intorno ad una retta.*
   (iii) L'isometria F *ha dei punti fissi?*

(i) L'applicazione F è lineare ed è data da $X \mapsto MX$, dove M è una matrice ortogonale (le sue colonne sono vettori di lunghezza uno e a due a due ortogonali). Dunque è un'isometria lineare.
(ii) Scrivendo

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

F risulta la composizione di una riflessione rispetto ad un piano e di una rotazione intorno ad una retta (in questo caso particolare è indifferente chi viene prima).

(iii) L'isometria F non ha punti fissi: sia la rotazione che la riflessione mandano in sè l'asse y e il piano (x,z), e lo stesso vale per F. La rotazione fissa l'asse y e "muove" il piano (x,z), la riflessione fissa il piano (x,z) e "rovescia" l'asse y. Quindi la composizione non ha punti fissi. Si può anche verificare che la matrice di F non ha autovalori uguali a 1.

3. *Sia S_1 la riflessione rispetto alla retta di equazione $x-y=0$ ed S_2 la riflessione rispetto alla retta $x=1$.*
   (i) Scrivere le formule per S_1, per S_2 e per la composizione $S_2\circ S_1$.
   (ii) Calcolare l'immagine della retta $y=1$ tramite $S_2\circ S_1$.

(i) La retta $r_1 \;\; x-y=0$ passa per l'origine e forma un angolo $\theta=\pi/4$ con l'asse delle x positive. Quindi la riflessione rispetto ad r_1 è data da

$$S_1(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & \sin\pi/2\\ \sin\pi/2 & -\cos\pi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix};$$

La retta $r_2 \;\; x=1$ non passa per l'origine ed è parallela all'asse y. Se S indica la riflessione rispetto all'asse y, la riflessione rispetto ad r_2 è data da

$$S_1(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}) = T_{\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}}\circ S\circ T_{\begin{pmatrix} -1\\ 0\end{pmatrix}}(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}) = T_{\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\begin{pmatrix} x-1\\ y\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x+2\\ y\end{pmatrix}.$$

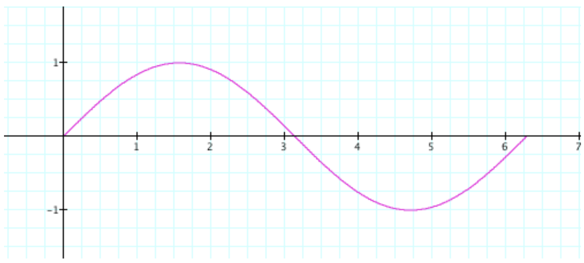
La composizione $S_2\circ S_1$ 'e data da

$$S_2\circ S_1(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}) = S_2(S_1(\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} -y+2\\ x\end{pmatrix}.$$

(ii) L'immagine della retta $y=1$ tramite $S_2\circ S_1$ è la retta $x=1$. Si trova ad esempio come la retta passante per i trasformati di due punti qualunque della retta $y=1$.

5. *Sia data la curva $\gamma(t)=\begin{pmatrix} t\\ \sin t\end{pmatrix}$, per $t\in[0,2\pi]$.*
   (i) Disegnare γ.
   (ii) Determinare la curvatura di γ al variare di t.
   (iii) Determinare il raggio di curvatura di γ nei punti dove la curvatura è massima.

(i)



La curva γ.

(ii) Scrivendo

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix} t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix},\quad \gamma'(t)=\begin{pmatrix} 1\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix},\quad \gamma''(t)=\begin{pmatrix} 0\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}$$

calcoliamo la curvatura (senza segno) con la formula

$$\kappa(t)=\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}=\frac{|-\sin t|}{(\sqrt{1+\cos^2 t})^3}.$$

(iii) La curvatura è massima per $t = \pi/2, 3\pi/2$, dove vale 1. Dunque nei punti di curvatura massima, il raggio di curvatiura della curva è $\rho = 1$.
Osservazione. Se invece si considera la curvatura con segno, allora è data da

$$\kappa(t) = \frac{-\sin t}{(\sqrt{1+\cos^2 t})^3}.$$

Il segno negativo fra 0 e π riflette il fatto che su tale intervallo la curva "gira in senso orario", mentre il segno positivo fra π e 2π riflette il fatto che su tale intervallo la curva "gira in senso antiorario".

4. *Sia data la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}$, *per* $t \in \mathbb{R}$.
   (i) Determinare se γ è regolare.
   (ii) Determinare il piano osculatore a γ nel punto $\gamma(\pi)$.
   (iii) Determinare se γ è una curva piana.
   (iv) Aiutandosi con un disegno, descrivere l'andamento della curvatura di γ al crescere di t.

(i) Poiché per ogni $t \in \mathbf{R}$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la curva è regolare in ogni punto.
(ii) Per $t = \pi$, abbiamo

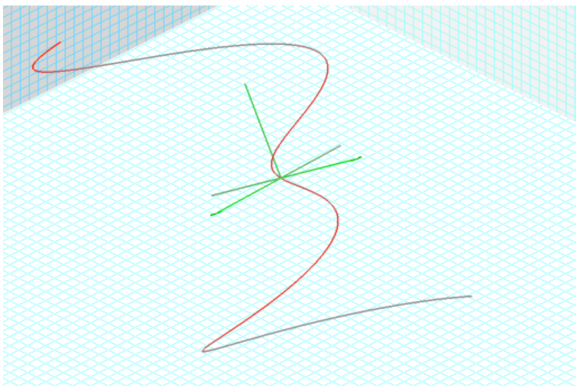
$$\gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il piano osculatore è dato da

$$X = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \pi \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \pi y + (2+\pi^2)z = \pi^3.$$

(iii) Poiché il punto $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non sta nel piano osculatore a γ nel punto $\gamma(\pi)$, la curva non è piana.

(iv)



La curva γ è un'elica conica, che si avvolge sul cono $x^2 + y^2 = z^2$.

"Vista dall'alto" è una spirale che si allarga al tendere di $|t| \to +\infty$. Quindi la curvatura decresce e tende a zero al tendere di $|t| \to +\infty$.