(1) *Siano dati i punti del piano*

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) *Determinare una curva di grado 4 che passa per tali punti, per* $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$.
(ii) *Quante ce ne sono?*
(iii) *Col metodo dei minimi quadrati, determinare la cubica che passa più vicina a tali punti.*

(i) Una curva polinomiale di grado quattro in $\mathbf{R}^2$ è della forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

dunque è determinata dai sui 10 coefficienti. Imporre a γ di passare per i punti dati, in corrispondenza dei valori del parametro $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ porta al seguente sistema lineare di 10 equazioni in 10 incognite (le incognite sono appunto i coefficienti della curva)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}^4 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}^4 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}^4 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}^4 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Questo stesso sistema può essere anche pensato come un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite vettoriali $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \ldots, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$, con matrice dei coefficienti e termini noti dati da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 1/16 & 1/64 & 1/246 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/16 & 1/64 \\ 1 & 3/4 & 9/16 & 27/64 & 81/246 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo troviamo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10849/1809 & 8 & -1216/603 & 40/1089 & -5/603 \\ 45856/5427 & -56/3 & -24064/1809 & -23896/5427 & 2384/1809 \\ -6928/5427 & 32/3 & -44032/1809 & 118240/5427 & -12368/1809 \\ -1312/603 & 0 & 2624/201 & -10496/603 & 1312/201 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{b} = -10849/1809\mathbf{p}_0 + 8\mathbf{p}_1 - 1216/603\mathbf{p}_2 + 40/1089\mathbf{p}_3 - 5/603\mathbf{p}_4, \ldots \text{etc} \ldots.$$

(ii) Poiché M è invertibile, la curva γ è unica. In generale, per $n+1$ punti distinti in $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, passa un'unica curva polinomiale di grado n, passano infinite curve di grado minore di n e, nella maggior parte dei casi, nessuna curva di grado maggiore di n.

(iii) Una cubica, ossia una curva polinomiale di grado tre, è della forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Imporre a γ di passare per i punti dati, in corrispondenza dei valori del parametro $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ porta al seguente sistema lineare di 10 equazioni in 8 incognite (le incognite sono appunto i coefficienti della curva)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}^3 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti e termini noti dati da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/16 & 0 & 1/64 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/16 & 0 & 1/64 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/16 \\ 1 & 0 & 3/4 & 0 & 9/16 & 0 & 27/64 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & 9/16 & 0 & 27/64 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $rango(M) = 8$ mentre $rango(M|\mathbf{b}) = 9$, il sistema è incompatibile. Troviamo la cubica che passa più vicina ai punti dati, con il metodo dei minimi quadrati, ossia risolvendo il sistema di otto equazioni in otto incognite (le incognite sono appunto i coefficienti della curva) con matrice dei coefficienti e termini noti dati da

$${}^tMM, \quad {}^tM\mathbf{b}.$$

I coefficienti della cubica risultano univocamente determinati (${}^tMM$ è invertibile):

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/110 \\ 1/11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -107/55 \\ 50/11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 204/11 \\ -128/33 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -128/11 \\ 32/33 \end{pmatrix}.$$

(2) *Farin/Hansford: Cap.4, esercizi 3,4,7,8.*

• Farin/Hansford: Cap.4, esercizio 3. Per ottenere un punto su una curva di Bezier di grado n, a partire dagli $n+1$ punti del poligono di controllo, dobbiamo calcolare $n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ punti.

• Farin/Hansford: Cap.4, esercizio 4. Sia $x(t)$ la cubica di Bezier di pag.28, con poligono di controllo

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La derivata prima $x'(t)$ è una quadrica di Bezier con poligono di controllo

$$3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad 3(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1), \quad 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)$$

e la derivata seconda è una curva di Bezier di grado uno con poligono di controllo

$$6(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0), \quad 6(\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1).$$

Quindi $x''(1) = 6(\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

• Farin/Hansford: Cap.4, esercizio 7. Abbiamo che

$$\begin{pmatrix} B_0^2 + B_1^2 + B_1^2 \\ \frac{1}{2}B_1^2 + B_2^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Sull'intervallo $[0,1]$, la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t + t^2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si scrive come curva di Bezier nel seguente modo

$$\gamma(t) = B_0^2(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_1^2(t)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + B_2^2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Per ottenere $\gamma(u) = \begin{pmatrix} u \\ 2u + u^2 \end{pmatrix}$ come curva di Bezier sull'intervallo $[-1,1]$, scriviamo $t = (u+1)/2$, da cui $u = 2t - 1$, e consideriamo la curva

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2t-1) = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ 4t^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Adesso siamo nella situazione precedente e possiamo continuare come sopra, etc....

• Farin/Hansford: Cap.4, esercizio 8. La funzione $u \mapsto t = (u+2)/4$ stabilisce un diffeomorfismo tra l'intervallo $[-2,2]$ e $[0,1]$. Per $u = -1$, vale $t = 1/2$.

(3) *Farin/Hansford: Cap.5, esercizi 1,2,3,5.* Due curve che passano per gli stessi punti, ma in tempi diversi, sono diverse.

• Farin/Hansford: Cap.5, esercizio 1. Dati i punti

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

determinare il poligono di controllo della cubica di Beziér passante per tali punti.

Una cubica, ossia una curva polinomiale di grado tre, si può sempre scrivere come curva di Beziér nella forma

$$\gamma(t) = (1-t)^3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

dove i vettori $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ individuano il poligono di controllo di γ. Imporre a γ di passare per i punti dati, in corrispondenza dei valori del parametro $t = 0, 1/3, 2/3, 1$ porta al seguente sistema lineare di 8 equazioni in 8 incognite (le incognite sono questa volta le coordinate dei punti del poligono di controllo della curva)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{2}{3}^3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 3\frac{2}{3}^2\frac{1}{3}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + 3\frac{2}{3}\frac{1}{3}^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}^3\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{3}^3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 3\frac{1}{3}^2\frac{2}{3}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + 3\frac{1}{3}\frac{2}{3}^2\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}^3\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Questo stesso sistema può essere anche pensato come un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite vettoriali $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \ldots, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, con matrice dei coefficienti e termini noti dati da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/27 & 4/9 & 2/9 & 1/27 \\ 1/27 & 2/9 & 4/9 & 8/27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo troviamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{b} = -5/6\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 - 3/2\mathbf{p}_2 + 1/3\mathbf{p}_3, \quad \mathbf{c} = 1/3\mathbf{p}_0 - 3/2\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2 - 5/6\mathbf{p}_3, \quad \mathbf{d} = \mathbf{p}_3.$$

Come ci dovevamo aspettare, γ passa per il primo punto e per l'ultimo punto del suo poligono di controllo, rispettivamente per $t = 0$ e $t = 1$.

- Farin/Hansford: Cap.5, esercizio 2. Dati i punti

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

determinare la curva di grado 2 che passa per essi, in corrispondenza di $t = 0, 1/2, 1$.

Scriviamo γ come curva di Beziér nella forma

$$\gamma(t) = (1-t)^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + 2(1-t)t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

La curva γ passa per il primo punto e per l'ultimo punto del suo poligono di controllo, rispettivamente per $t = 0$ e $t = 1$. Di conseguenza,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Imponendo $\gamma(1/2) = \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, troviamo

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Farin/Hansford: Cap.5, esercizio 3.

(4) *Farin/Hansford: Cap.8, esercizi 1,2.*

(5) *Farin/Hansford: Cap.9, esercizi 1,2,3,4,6.*

- Farin/Hansford: Cap.9, esercizio 1. Sia $\gamma(t)$ la cubica di Bezier con poligono di controlo $\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, per $t \in [0, 1]$. Allora

$$\gamma'(1) = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma''(1) = 6(\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(Usare il fatto che la derivata di una curva di Bezier di grado n è una curva di Bezier di grado $n-1$, etc...). La cubica di Bezier con lo stesso poligono di controllo, ma parametrizzata dall'intervallo $[0,2]$ è data da

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(u/2), \quad u \in [0,2],$$

dove γ è la cubica di Bezier standard, con poligono di controlo $\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, parametrizzata dall'intervallo $[0,1]$. Per la derivata vale

$$\tilde{\gamma}'(u) = \frac{1}{2}\gamma'(u/2), \quad \tilde{\gamma}'(1) = \frac{1}{2}\gamma'(1/2).$$

Poiché $\gamma'(1/2) = 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)(1-1/2)^2 + 3(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)2(1-1/2)1/2 + 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)(1/2)^2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$, si ha

$$\tilde{\gamma}'(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 9/8 \end{pmatrix}.$$

In modo analogo, per la derivata seconda si trova

$$\tilde{\gamma}''(u) = \frac{1}{4}\gamma''(u/2), \quad \tilde{\gamma}''(1) = \frac{1}{2}\gamma''(1/2).$$

Poiché $\gamma''(1/2) = 6(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1)(1-1/2) + 6(\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1)1/2 = 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, si ha

$$\tilde{\gamma}''(1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

• Farin/Hansford: Cap.9, esercizio 2. La curva composta è C^0: la traiettoria della seconda curva comincia dove finisce la traiettoria della prima.
La curva composta è G^1: per ipotesi, i punti del poligono di controllo sono collineari. Dunque la tangente alla prima curva in $\mathbf{b}_1$ è parallela alla tangente alla seconda curva in $\mathbf{b}_1$.
La curva composta è G^2: sui entrambi i segmenti la curvatura è identicamente nulla. In particolare è continua nel punto di congiunzione.
Esaminiamo adesso la condizione C^1:
sia $\tilde{\gamma}_1(u) = \gamma_1(\frac{u-a}{b-a})$ la curva di Bezier di grado 1 con poligono di controllo $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, parametrizzata dall'intervallo $[a,b]$,e sia $\tilde{\gamma}_2(u) = \gamma_1(\frac{u-b}{c-b})$ la curva di Bezier di grado 1 con poligono di controllo $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, parametrizzata dall'intervallo $[b,c]$. (qui γ_1 e γ_2 sono le curve di Bezier standard, con lo stesso poligono di controllo, parametrizzate dall'intervallo $[0,1]$).
La curva composta $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ è C^1 se e solo se:

$$\tilde{\gamma}_1'(b) = \tilde{\gamma}_2'(b) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b}_1 = \frac{b-a}{c-a}\mathbf{b}_2 + \frac{c-b}{c-a}\mathbf{b}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b}_1 = (1-a)\mathbf{b}_2 + \alpha\mathbf{b}_0, \quad \alpha = \frac{c-b}{c-a}.$$

Ad esempio, nel caso particolare in cui $b-a = c-b$, la condizione C^1 è soddisfatta se e solo se $\mathbf{b}_1$ è il punto medio fra $\mathbf{b}_0$ e $\mathbf{b}_2$.
Infine, trattandosi di curve di primo grado, con derivata seconda identicamente nulla, la condizione C^2 è verificata.

• Farin/Hansford: Cap.9, esercizio 3. sia $\tilde{\gamma}_1(u) = \gamma_1(\frac{u-a}{b-a})$ la curva di Bezier di grado 1 con poligono di controllo $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, parametrizzata dall'intervallo $[a,b]$,e sia $\tilde{\gamma}_2(u) = \gamma_1(\frac{u-b}{c-b})$ la curva di Bezier di grado 1

con poligono di controllo $\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_4$, parametrizzata dall'intervallo $[b, c]$. (qui γ_1 e γ_2 sono le curve di Bezier standard, con lo stesso poligono di controllo, parametrizzate dall'intervallo $[0, 1]$).
Per semplicità da ora supponiamo $c - b = b - a = 1$ e $c - a = 2$.
La curva composta è C^0: la traiettoria della seconda curva comincia dove finisce la traiettoria della prima.
La curva composta è G^1 poiché il vettore in tangente a $\tilde{\gamma}_1$ in $\mathbf{b}_2$ e il vettore in tangente a $\tilde{\gamma}_2$ in $\mathbf{b}_2$ sono paralleli:

$$\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad || \quad \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La curva composta è C^1: infatti

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{b}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per verificare se sono soddisfatte le condizioni G^2 e C^2, dobbiamo calcolare le derivate prime e seconde delle curve in b:

$$\tilde{\gamma}_1'(u) = \frac{1}{b-a}\gamma_1'(\frac{u-a}{b-a}) = \gamma_1'(u-a), \qquad \tilde{\gamma}_1''(u) = \gamma_1''(u-a),$$

$$\tilde{\gamma}_2'(u) = \frac{1}{c-b}\gamma_1'(\frac{u-b}{c-b}) = \gamma_1'(u-b), \qquad \tilde{\gamma}_1''(u) = \gamma_1''(u-b)$$

da cui

$$\tilde{\gamma}_1'(b) = \gamma_1'(b-a) = \gamma_1'(1) = 2(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\gamma}_1''(b) = \gamma_1''(1) = 2(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\gamma}_2'(b) = \gamma_2'(b-b) = \gamma_2'(0) = 2(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\gamma}_2''(b) = \gamma_1''(0) = 2(\mathbf{b}_4 - 2\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Adesso è chiaro che $\tilde{\gamma}$ non è C^2.
Calcolando le curvature in b con le solite formule, si trova

$$\kappa_1(b) = 1 \neq \kappa_2(b) = 1/2.$$

Dunque $\tilde{\gamma}$ non è neanche G^2.

• Farin/Hansford: Cap.9, esercizio 4. Poiché $7 - 4 = 4 - 1 = 3$, la condizione perché la curva composta sia C^1 è che $\mathbf{b}_3$ sia il punto medio fra $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_4$, da cui $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Farin/Hansford: Cap.9, esercizio 6. Osserviamo innanzitutto che $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ sono collineari, quindi la curva è almeno G^1. Affinché sia C^1, bisogna che

$$\mathbf{b}_3 = \frac{b-a}{c-a}\mathbf{b}_4 + \frac{c-b}{c-a}\mathbf{b}_2 = (1-\alpha)\mathbf{b}_4 + \alpha\mathbf{b}_2, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Questa condizione dà $\alpha = 2/3$. Ad esempio $a, b] \cup [b, c]$, con $c - a = 3$ e $c - b = 2$.