(3) Scrivere la curva di Beziér $\gamma$ in $\mathbf{R}^2$ che ha il poligono di controllo dato dai punti

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i ) Calcolare $\gamma(1/2)$ e $\gamma'(1/2)$.
(ii) Determinare $\gamma(1/2)$ e $\gamma'(1/2)$ con l'algoritmo di de Casteljau.

(i) La curva $\gamma$ è la curva polinomiale di grado tre data da

$$\gamma(t) = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la sua derivata è la curva polinomiale di grado due (di Beziér)

$$\gamma'(t) = t^2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2(1-t)t \begin{pmatrix} 15/2 \\ 3 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Direttamente da queste espressioni, troviamo

$$\gamma(1/2) = \begin{pmatrix} 29/16 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \qquad \gamma'(1/2) = \begin{pmatrix} 39/8 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Per determinare $\gamma(1/2)$ con l'algoritmo di de Casteljau, calcoliamo

$$\mathbf{b}_0^1 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^1 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2^1 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_0^2 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1^2 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2^1 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

e finalmente

$$\gamma(1/2) = \frac{1}{2}\mathbf{b}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^2 = \begin{pmatrix} 29/16 \\ 5/4 \end{pmatrix}.$$

Per determinare $\gamma'(1/2)$ con l'algoritmo di de Casteljau, calcoliamo

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15/2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e finalmente

$$\gamma'(1/2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18/4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 21/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39/8 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

(4) Sia $\gamma$ la curva dell'esercizio 3.
(i ) Scrivere la curva di Beziér $\sigma$ nel piano, immagine di $\gamma$ tramite la rotazione di una angolo di $\pi/2$ intorno all'origine.
(ii) Determinare $\sigma(1/3)$ e $\sigma'(1/3)$ con l'algoritmo di de Casteljau.

(i) Sia $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice rappresentativa della la rotazione di una angolo di $\pi/2$ intorno all'origine. Per l'invarianza delle curve di Beziér per trasformazioni affini, la curva $\sigma$ nel piano, immagine di $\gamma$ tramite $R$, è la curva di Beziér che ha poligono di controllo dato da

$$R(\mathbf{b}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R(\mathbf{b}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad R(\mathbf{b}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R(\mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La sua derivata è la curva di Bézier di grado due che ha poligono di controllo dato da

$$3(R(\mathbf{b}_1)-R(\mathbf{b}_0)) = \begin{pmatrix}-3\\3/2\end{pmatrix}, \quad 3(R(\mathbf{b}_2)-R(\mathbf{b}_1)) = \begin{pmatrix}-3\\15/2\end{pmatrix}, \quad 3(R(\mathbf{b}_3)-R(\mathbf{b}_2)) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

(ii) Per determinare $\sigma(1/3)$ con l'algoritmo di de Casteljau, calcoliamo

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\1/6\end{pmatrix}, \quad \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/3\\4/3\end{pmatrix}, \quad \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/3\\10/3\end{pmatrix},$$

etc.....fino a trovare

$$\sigma(1/3) = \begin{pmatrix}-25/27\\28/27\end{pmatrix}.$$

Analogamente per determinare $\sigma'(1/3)$ calcoliamo

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\3/2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\15/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\1/6\end{pmatrix}, \quad \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\15/2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix},$$

fino a trovare

$$\sigma'(1/3) = \begin{pmatrix}-7/3\\13/3\end{pmatrix}.$$

(5) Farin/Hansford: Cap.3, esercizi 1,2,3,4,5,6,7.

• Esercizio 1.

Se tutti i punti del poligono di controllo di una curva di Beziér coincidono $\mathbf{b}_0 = \ldots = \mathbf{b}_n$, la curva risulta

$$\gamma(t) = (B_0^n(t)+\ldots+B_n^n(t))\mathbf{b}_0 \equiv \mathbf{b}_0, \quad \forall t,$$

ossia è ridotta al solo punto $\mathbf{b}_0$.

• Esercizio 2. Una cubica di Beziér è data da

$$\gamma(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3.$$

Per

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},$$

i punti della curva in corrispondenza dei valori del parametro $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ sono

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3/4\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}9/4\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}.$$

Per

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},$$

i punti della curva in corrispondenza dei valori del parametro $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ sono

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}15/32\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}81/32\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}.$$

Per

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},$$

i punti della curva in corrispondenza dei valori del parametro $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ sono

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 57/64 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 135/64 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se i punti di Beziér sono allineati, la curva di Beziér sta sulla retta che li contiene.

• Esercizio 3. Con l'algoritma di de Casteljau, calcolare il punto $\gamma(1/4)$ della curva di Beziér con poligono di controllo

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con il procedimento usato nell'esercizio 1(ii), troviamo

$$\gamma(1/4) = \begin{pmatrix} -11/16 \\ 9/16 \end{pmatrix}, \qquad \gamma'(1/4) = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

• Esercizio 4. Il poligono di controllo di $\gamma$ ristretta a $[0, 1/4]$ è dato dai punti

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -7/8 \\ 7/16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -11/16 \\ 9/16 \end{pmatrix}.$$

Il poligono di controllo di $\gamma$ ristretta a $[1/4, 1]$ è dato dai punti

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -11/16 \\ 9/16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 15/16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Esercizio 5. Sia

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ B_0^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ (1-t)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\{1, t, t^2, t^3\}$ e $\{B_0^3(t), B_1^3(t), B_2^3(t), B_3^3(t)\}$ sono due basi dello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre, possiamo esprimere ogni elemento dell'una come combinazione di elementi dell'altra. Precisamente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) - B_3^3(t) \\ 1/3 B_1^3(t) + 2/3 B_2^3(t) + B_3^3(t) \\ 1/3 B_2^3(t) + B_3^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix}.$$

Sostituendo queste relazioni nell'equazione di $\gamma$ e raccogliendo i coefficienti (vettoriali) di $\{B_0^3(t), B_1^3(t), B_2^3(t), B_3^3(t)\}$, si trovano i punti del poligono di controllo di $\gamma$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gli altri esempi si trattano allo stesso modo.

• Esercizio 6.
Similmente, si ha

$$\begin{pmatrix} B_0^3(t) \\ B_1^3(t) \\ B_2^3(t) \\ B_3^3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3t + 3t^2 + t^3 \\ 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ 3t - 3t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

coosí sostituendo queste relazioni nell'equazione di una curva di Beziér e raccogliendo i coefficienti (vettoriali) di $\{1, t, t^2, t^3\}$, se ne trova l'espressione "monomiale".

• Esercizio 7.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1^3(t) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2^3(t) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + B_3^3(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque il poligono di controllo della curva $\gamma$ è dato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$