(1) *Sia* $\pi: \; X = P + tA + sB, \; t, s \in \mathbf{R}$ *un piano in* $\mathbf{R}^3$.

(i) Dimostrare che π *è una superficie (parametrizzata) regolare in tutti i punti.*

(ii) Calcolare il piano tangente e il versore normale ad π *al variare di* t, s.

(iii) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di π.

(iv) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di π.

(i)(ii) Osserviamo innanzitutto che, al variare di $s, t \in \mathbf{R}$, la funzione $S(s,t) = P + tA + sB$ descrive un piano in $\mathbf{R}^3$ se e solo se A e B sono vettori linearmente indipendenti. Per ogni $s, t \in \mathbf{R}$, si ha

$$S_t(t,s) \equiv A, \quad S_s(t,s) \equiv B, \quad N(t,s) \equiv \frac{A \wedge B}{\|A \wedge B\|}.$$

Ne segue che i vettori $\{S_t(t,s), S_s(t,s)\}$ sono linearmente indipendenti per ogni $s, t \in \mathbf{R}$ e dunque π è una superficie regolare in ogni punto. Per ogni $s, t \in \mathbf{R}$, il piano tangente a π in $S(t,s)$ è il piano stesso.
(iii)(iv) I coefficienti della prima forma fondamentale di π sono

$$E = A \cdot A, \quad F = A \cdot B, \quad G = B \cdot B.$$

Poiché $S_{tt}(t,s) = S_{ss}(t,s) = S_{st}(t,s) \equiv 0$, i coefficienti della seconda forma fondamentale sono $e = f = g = 0$. Di conseguenza, ogni punto di π è *planare* e la curvatura media e la curvatura gaussiana di π sono identicamente nulle.

(2) *Sia* $S = S(u,v)$ *una superficie regolare. Sia* $P = S(u_0, v_0)$ *un punto non planare e non umbilicale, dove i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale soddisfano*

$$F = S_u \cdot S_u = 0, \qquad f = N \cdot S_{uu} = 0.$$

Far vedere che le curvature principali (il massimo e il minimo della curvatura normale $k_N(\gamma)$*, al variare delle curve* γ *su* S *passanti per* P*) sono date da*

$$k_1 = \frac{e}{E}, \qquad k_2 = \frac{g}{G}$$

e sono assunte rispettivamente sulle curve $u = u_0$ *e* $v = v_0$.

Sia $\gamma(t) = S(u(t), v(t))$ una curva regolare su S passante per P e sia $\gamma'(t) = S_u u' + S_v v'$.. Nelle nostre ipotesi, la curvatura normale di γ in P è data dalla funzione omogenea di grado zero in u', v'

$$k_N(u', v') = \frac{e(u')^2 + g(v')^2}{E(u')^2 + G(v')^2}.$$

Poiché una funzione omogenea di grado zero è costante sulle rette per l'origine ($k_N(u', v') = k_N(\lambda u', \lambda v')$, per ogni $\lambda \neq 0$) può essere considerata una funzione dalla sfera unitaria di $\mathbf{R}^2$ ad $\mathbf{R}$. Dunque ha necessariamente massimo e minimo. I punti critici di k_N sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial u'} = \frac{1}{(E(u')^2+G(v')^2)^2} 2u'(v')^2(eG - gE) = 0 \\ \frac{\partial k}{\partial v'} = \frac{-1}{(E(u')^2+G(v')^2)^2} 2(u')^2 v'(eG - gE) = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Poiché il punto P non è planare e non è umbilicale, $eg \neq 0$ e $eG - gE \neq 0$. Di conseguenza, le soluzioni del sistema (*) sono

$$u' = 0, \quad \text{e} \quad v' = 0.$$

Essendo gli unici due punti critici di k, sono necessariamente punti di massimo o minimo (a seconda dei valori di e, E e di g, G). Essi corrispondono alle curve $u = u_0$ e $v = v_0$, su cui la curvatura normale assume rispettivamente i valori $k_2 = \frac{g}{G}$ e $k_1 = \frac{e}{E}$.

Alternativamente: Per le curve con $u' \neq 0$ in P, ponendo $m = v'/u'$ possiamo scrivere

$$k_N(\gamma) = \frac{e + gm^2}{E + Gm^2}.$$

Differenziando rispetto ad m, troviamo che la derivata si annulla se e solo se $m = 0$ che equivale a $v' = 0$. Sulla curva $v = v_0$, la curvatura normale assume il valore $k_1 = \frac{e}{E}$. Per le curve con $v' \neq 0$ in P, ponendo $m = u'/v'$ possiamo scrivere

$$k_N(\gamma) = \frac{em^2 + g}{Em^2 + G}.$$

Differenziando rispetto ad m, troviamo che la derivata si annulla se e solo se $m = 0$ che equivale a $u' = 0$. Sulla curva $u = u_0$, la curvatura normale assume il valore $k_2 = \frac{g}{G}$.

(3) *Cilindro. Sia $S\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la superficie data da*

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbf{R}.$$

- *(i) Dimostrare che S coincide con la superficie data dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$.*
- *(ii) Dimostrare che S è regolare in tutti i punti e che in ogni punto di S il piano tangente è un piano verticale.*
- *(iii) Verificare che S è una superficie rigata sviluppabile.*
- *(iv) Verificare che S è una superficie di rotazione.*
- *(v) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S e confrontarle con quelle di un piano.*
- *(vi) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di S.*

(i) Ogni punto di S soddisfa l'equazione $x^2 + y^2 = 1$. Viceversa, ogni punto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ può essere scritto come $\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}$, in quanto le prime due coordinate soddisfano l'equazione del cerchio di centro 0 e raggio 1, e la terza coordinata è libera.

(ii) Poiché i vettori $S_u = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$ e $S_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti per ogni u, v, la superficie S è regolare in ogni punto. Poiché $S_u \wedge S_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$, il piano tangente ad un punto $S(u_0, v_0)$ risulta

$$\cos u_0 x + \sin u_0 y = 1$$

ed è un piano verticale (l'equazione non contiene la variabile z).

(iii) Scrivendo

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \det(Q, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0,$$

vediamo che S è una superficie rigata sviluppabile.

(iv) S è la superficie di rotazione ottenuta ruotando la retta $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$ (di equazione $y = 1$ nel piano y, z) attorno all'asse z:

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

(v) Poiché $S_{uu} = -\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_{vv} = S_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$, la prima e la seconda forma fondamentale di S sono date rispettivamente da

$$E = G = 1, \quad F = 0, \qquad e = -1, \quad f = g = 0.$$

La prima forma fondamentale di S coincide con quella di un piano: da ciò segue che il cilindro è "localmente isometrico" ad un piano. Questo concorda col fatto che il cilindro è sviluppabile, ossia un pezzo di cilindro può essere steso su un pezzo di piano senza cambiarne le misure di lunghezza e di angolo. D'altra parte, mentre i punti di un piano sono tutti planari, i punti di un cilindro sono parabolici. Dunque un pezzo di cilindro non può essere portato su un pezzo di piano mediante un movimento rigido.
(vi) Per il risultato dell'esercizio 2, le curvature principali sono $k_1 = -1$ e $k_2 = 0$. Da cui la curvatura media e la curvatura gaussiana di S sono date rispettivamente da $H = -1/2$ e $K = 0$..

(4) *Dimostrare che*

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2u^2 + 2v^2 \end{pmatrix}, \qquad T(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

sono parametrizzazioni equivalenti del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Sol: È chiaro innanzitutto che al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, T è una parametrizzazione del paraboloide $z = x^2 + y^2$. Poiché

$$2u^2 + 2v^2 = (u + v)^2 + (u - v)^2,$$

anche i punti di S appartengono al paraboloide $z = x^2 + y^2$.
Sia $\phi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \end{pmatrix}$. L'applicazione ϕ è invertibile (infatti $u = \frac{1}{2}(a + b)$, $v = \frac{1}{2}(a - b)$) ed ha jacobiano con determinante non nullo per ogni u, v. Infine

$$T \circ \phi(u, v) = T(u + v, u - v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ (u + v)^2 + (u - v)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2u^2 + 2v^2 \end{pmatrix} = S(u, v).$$

(5) *Iperboloide a due falde. Sia γ la curva del piano (y, z) data da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh t \\ 2\cosh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.*

- *(i) Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando γ attorno all'asse z e determinare un'equazione che definisce S.*
- *(ii) Determinare i punti in cui S è regolare.*
- *(iii) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S nei punti regolari.*
- *(iv) Determinare il segno della curvatura gaussiana di S (nei punti regolari).*

Utilizzare le formule ricavate nelle note.

(6) *Iperboloide a una falda. Sia γ la curva del piano (y,z) data da* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \\ 2\sinh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

(i) Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando γ attorno all'asse z e determinare un'equazione che definisce S.
(ii) Determinare i punti in cui S è regolare.
(iii) Determinare i punti di S dove la curvatura gaussiana è massima.
(iv) Determinare le linee di curvatura dove la curvatura gaussiana è massima.
(v) Scegliere un punto $P \in S$ e determinare una curva su S, passante per P, con curvatura normale nulla.

(i) Una parametrizzazione della superficie cercata è

$$S(t,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cosh t \\ \sin\theta\cosh t \\ 2\sinh t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

(ii) Poiché $\cosh t \geq 1$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, la curva γ non tocca mai l'asse di rotazione e la superficie S è regolare in tutti i punti.

(iii)(iv) Dai soliti calcoli (vedi note), troviamo

$$E = \cosh^2 t, \quad G = 1 + 2\sinh^2 t, \quad F = 0, \qquad e = \frac{-1}{\sqrt{1+2\sinh^2 t}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{\cosh^2 t}{\sqrt{1+2\sinh^2 t}}.$$

Da ciò e dai risultati dell'esercizio 2, abbiamo che le curvature principali sono date rispettivamente da

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{-1}{\cosh^2 t\sqrt{1+2\sinh^2 t}}, \qquad k_2 = \frac{g}{G} = \frac{\cosh^2 t}{(1+2\sinh^2 t)\sqrt{1+2\sinh^2 t}}.$$

Le linee di curvatura in un punto $P \in S$ sono sempre il parallelo e il meridiano passanti per P. La curvatura Gaussiana

$$K = k_1 k_2 = \frac{-1}{(1+2\sinh^2 t)^2}$$

è sempre negativa: è minima nei punti del parallelo $t = 0$, mentre tende a zero al tendere di t a $\pm\infty$: la superficie diverta sempre più piatta verso l'infinito. È massima *in valore assoluto* nei punti del parallelo $t = 0$.

(v) L'iperboloide ad una falda è una superficie rigata (vedi esercizio 7): dato $P \in S$, una curva su S, passante per P, con curvatura normale nulla è la retta generatrice per P.

(7) *Determinare se le seguenti superfici sono rigate sviluppabili*

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u - v\sin u \\ \sin u + v\cos u \\ v \end{pmatrix}, \qquad T(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u - v\sin u \\ \sin u + v\cos u \\ u \end{pmatrix}.$$

Sol: Scriviamo $S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{pmatrix}$. Poiché

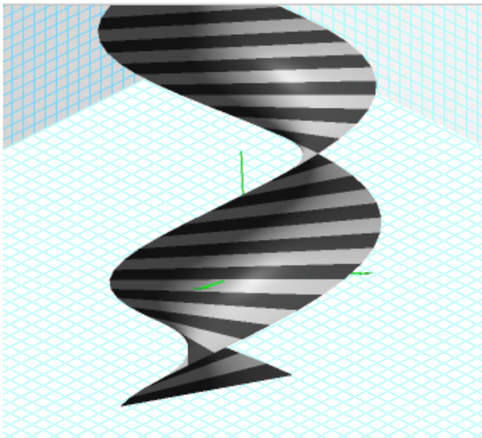
$$\det\begin{pmatrix} -\sin u & -\sin u & -\cos u \\ \cos u & \cos u & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) \neq 0$$

la superficie S non è sviluppabile. Si può verificare che la superficie S è un iperboloide ad una falda: tutti i punti di S soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Analogamente, scriviamo $T(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ u \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché

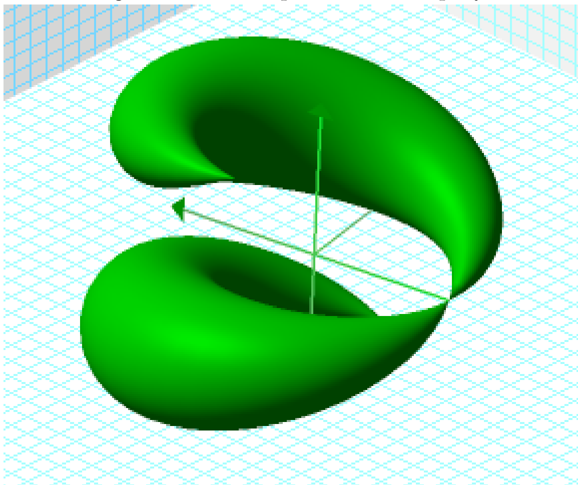
$$\det \begin{pmatrix} -\sin u & -\sin u & -\cos u \\ \cos u & \cos u & -\sin u \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \neq 0$$

la superficie T non è sviluppabile.



La superficie T è un elicoide.

(8) *Discutere il segno della curvatura gaussiana nei punti della superficie della figura.*



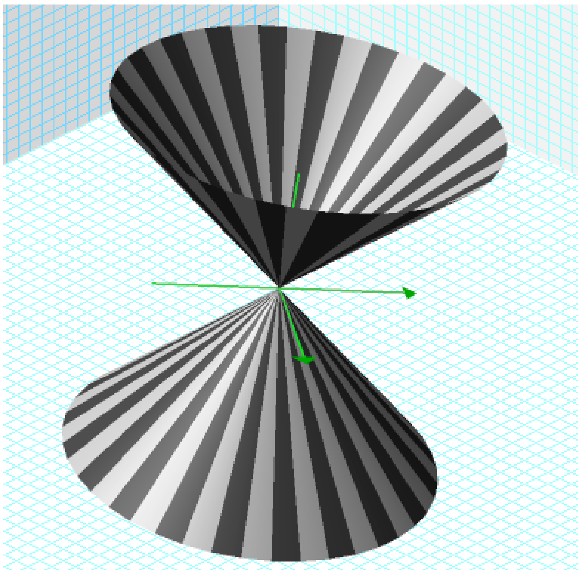
Preso un punto P nella parte "esterna" della superficie, si vede che tutte le curve su S passanti per P hanno la concavità rivolta dalla stessa parte. Pertanto questi punti hanno curvatura gaussiana non-negativa (probabilmente strettamente positiva). Viceversa, preso un punto P nella parte "interna" della superficie, si vede che fra tutte le curve su S passanti per P ce ne sono almeno due con la concavità rivolta dalla parte opposta. Pertanto questi punti hanno curvatura gaussiana non-positiva (probabilmente strettamente negativa).

(9) *Ruotare la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, *attorno all'asse* z. *Che superficie si trova?*

La superficie che si determina è data da

$$S(\theta, t) = \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\sin\theta \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \theta \in [0, 2\pi]$$

e si tratta del cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$. È una superficie rigata sviluppabile.



Il cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

(10) Sanini, Esercizi Cap. VI, N. 1.1, 1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.