1. Siano dati i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

   (i) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.
   (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
   (iii) Calcolare le coordinate del vettore $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base ortonormale così ottenuta.

Sol. (i) Usiamo il metodo dell'eliminazione gaussiana:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$
La matrice ha rango uguale a 3, che è la dimensione di $\mathbf{R}^3$: i tre vettori dati sono una base di $\mathbf{R}^3$.
(ii) Per prima cosa determiniamo una base ortogonale, che poi normalizzeremo. Se indichiamo con $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$ i tre vettori dati, allora
$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2}\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
La base ortonormale cercata è pertanto
$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{f}_3}{\|\mathbf{f}_3\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$
(iii) Si ha
$$X = (X \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (X \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (X \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$$
dunque le coordinate di X nella base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sono
$$X \cdot \mathbf{e}_1 = 7/\sqrt{2}; \qquad X \cdot \mathbf{e}_2 = -2/\sqrt{3}; \qquad X \cdot \mathbf{e}_3 = 5/\sqrt{6}$$

2. Ortonormalizzare i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4.$$

Spiegare il risultato.

Sol. Se indichiamo con $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$ i tre vettori dati, applicando il procedimento di Gram-Schmidt troviamo:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2}\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ragione di questo risultato è che in realtà i tre vettori dati sono linearmente dipendenti (si vede facilmente che $2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3$), e generano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2. Una base ortogonale per questo sottospazio è costituita dai due vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ ed una sua base ortonormale si ottiene normalizzando questa:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

3. Dati i vettori

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix},$$

calcolare e confrontare $X \cdot Y$, $||X||^2$, $||Y||^2$, e $||X+Y||^2$. Spiegare il risultato.

Sol. $X \cdot Y = 0$, $||X||^2 = 30$, $||Y||^2 = 101$, $||X+Y||^2 = 131$. Si ha $||X||^2 + ||Y||^2 = ||X+Y||^2$, il che si spiega facilemnte: poichè $X \cdot Y = 0$, i due vettori X e Y sono ortogonali; la regola del parallelogramma ci dice allora che $X+Y$ può essere visto come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti X e Y; l'identità $||X||^2 + ||Y||^2 = ||X+Y||^2$ non è altro che il teorema di Pitagora.

4. Sia dato il piano $\pi \quad x+y-z=0$ in $\mathbf{R}^3$. Siano $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (i) Determinare una base ortonormale di π.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale di P su π.
   (iii) Determinare la proiezione ortogonale su π della retta per P e Q.

Sol. (i) Una base di π è data dai due vettori

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricaviamo una base ortonormale con il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e dunque, normalizzando,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(ii) Indichiamo con $\mathbf{v}$ la proiezione ortogonale di P su π. Si ha

$$\mathbf{v} = (P \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

(iii) Il generico vettore della retta per P e Q è

$$P_t = P + t(Q - P) = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La sua proiezione su π è

$$\mathbf{v}_t = (P_t \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (P_t \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} (5-4t)/3 \\ (-1+2t)/3 \\ (4-2t)/3 \end{pmatrix}$$

5. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Descrivere l'insieme

$$\{X \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot P = 0\}.$$

Sol. Si tratta della retta di equazione cartesiana $x_1 - x_2 = 0$.

6. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Descrivere l'insieme

$$\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X \cdot P = 0\}.$$

Sol. Si tratta del piano di equazione cartesiana $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

7. Sia data la retta $r : x - 3y = 0$ in $\mathbf{R}^2$. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare il complemento ortogonale $r^\perp$.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
   (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

Sol. (i) Lo spazio $r^\perp$ è la retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (il vettore dei coefficienti dell'equazione cartesiana di r).

(ii) Un generatore per r è il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale per r si ottiene normalizzando $\mathbf{b}$: $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$. La proiezione ortogonale di P su r è data da

$$\pi_r(P) = (P \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 21/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$$

(iii) La distanza $d(P, r^{\perp})$ è uguale a $\|P - \pi_{r^{\perp}}(P)\|$. Una base ortonormale di $r^{\perp}$ è $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, dunque

$$\pi_{r^{\perp}}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3)\, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P - \pi_{r^{\perp}}(P) = \begin{pmatrix} 21/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d(P, r^{\perp}) = 7\sqrt{10}/10$$

8. Sia dato il piano $\alpha \quad x + y - z = 0$ in $\mathbf{R}^3$. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (i) Determinare il complemento ortogonale $\alpha^{\perp}$.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_{\alpha}(P)$.
   (iii) Determinare la distanza $d(P, \alpha^{\perp})$.

Sol. (i) Lo spazio $\alpha^{\perp}$ è la retta generata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (il vettore dei coefficienti dell'equazione cartesiana di α).

(ii) Una base per α è costituita dai due vettori $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale per α si ottiene ortonormalizzando $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La proiezione ortogonale di P su α è data da

$$\pi_{\alpha}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1)\, \mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2)\, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) La distanza $d(P, \alpha^{\perp})$ è uguale a $\|P - \pi_{\alpha^{\perp}}(P)\|$. Una base ortonormale di $\alpha^{\perp}$ è $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, dunque

$$\pi_{\alpha^{\perp}}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3)\, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P - \pi_{\alpha^\perp}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d(P, \alpha^\perp) = \sqrt{2}$$

9. Sia data la retta r $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ in $\mathbf{R}^3$. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare il complemento ortogonale $r^\perp$.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
   (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

Sol. (i) Lo spazio $r^\perp$ è il piano generato dai vettori $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (i vettori dei coefficienti delle equazioni cartesiane di r).

(ii) Una base per r è costituita dal vettore $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale per r si ottiene normalizzando $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{19} \\ 1/\sqrt{19} \\ -3/\sqrt{19} \end{pmatrix};$$

La proiezione ortogonale di P su r è data da

$$\pi_r(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3)\, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 9/19 \\ 3/19 \\ -9/19 \end{pmatrix}$$

(iii) La distanza $d(P, r^\perp)$ è uguale a $\|P - \pi_{r^\perp}(P)\|$. Una base ortonormale di $r^\perp$ si ottiene applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Si ha :

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque, normalizzando,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 9/\sqrt{190} \\ 3/\sqrt{190} \\ 10/\sqrt{190} \end{pmatrix}$$

dunque

$$\pi_{r^\perp}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1)\, \mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2)\, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 17/19 \\ 12/19 \\ 21/19 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P - \pi_{r^\perp}(P) = \begin{pmatrix} 21/19 \\ 7/19 \\ -21/19 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d(P, r^\perp) = 7\sqrt{19}/19$$

10. Sia

$$U = span\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4.$$

(i) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$.

(ii) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_U(P)$ e $\pi_{U^\perp}(P)$ di P su U e $U^\perp$ rispettivamente.

(iii) Calcolare $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P)$.

(iv) Calcolare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ da U e da $U^\perp$.

Sol. (i) Affinché il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ sia un elemento di $U^\perp$, deve essere

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che una base di $U^\perp$ è data dai due vettori

$$\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

(ii) Determinaiamo basi ortonormali di U e di $U^\perp$ (insieme formeranno una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$, vedi l'esercizio 14). Per u troviamo

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$$

Per $U^\perp$ troviamo

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{f}_4 = \mathbf{b}_4 - \frac{\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{b}_4}{\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3}\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{f}_3}{\|\mathbf{f}_3\|} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{f}_4}{\|\mathbf{f}_4\|} = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Si ha

$$\pi_U(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2$$

$$\pi_{U^\perp}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3)\,\mathbf{e}_3 + (P \cdot \mathbf{e}_3)\,\mathbf{e}_3$$

pertanto, se $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$,

$$\pi_U(P) = \begin{pmatrix} (p_1+p_3)/2 \\ (p_2+p_4)/2 \\ (p_1+p_3)/2 \\ (p_2+p_4)/2 \end{pmatrix}; \qquad \pi_{U^\perp}(P) = \begin{pmatrix} (p_1-p_3)/2 \\ (p_2-p_4)/2 \\ (p_3-p_1)/2 \\ (p_4-p_2)/2 \end{pmatrix}$$

(iii) Il vettore $\pi_U(P)$ è un elemento dello spazio U, mentre il vettore $\pi_{U^\perp}(P)$ è un elemento dello spazio $U^\perp$, dunque $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P) = 0$.
(iv) La distanza $d(P, U)$ è uguale a $\|P - \pi_U(P)\|$. Si ha

$$P - \pi_U(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $d(P, U) = \sqrt{2}/2$. In modo analogo, $d(P, U^\perp) = \|P - \pi_{U^\perp}(P)\| = \sqrt{2}/2$.

11. Controllare se i vettori
$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$$
formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Sol. E' immediato osservare che i tre vettori hanno norma uno. Per verificare che formano una base ortonormale è dunque sufficiente mostrare che sono a due a due ortogonali. Ma l'ortogonalità è preservata dalla moltiplicazione per scalari, dunque basta controllare che i tre vettori

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

siano ortogonali, il che si verifica facilmente.

12. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ il cui primo vettore sia $P/||P||$. In quanti modi si può fare?

Sol. Indichiamo con π il piano ortogonale al vettore P. Completare $P/\|P\|$ ad una base ortonoramele di $\mathbf{R}^3$ è equivalente a dare una base ortonormale di π (e dunque può essere fatto in tanti modi quante sono le basi ortonoramli di uno spazio euclideo di dimensione due, che sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del gruppo ortogonale $O(2)$). Per determinare una base ortonoramle di π basta determinarne una base arbitraria e poi ortonormalizzarla col procedimento di Gram-Schmidt. L'equazione cartesiana di π è $2x_1 + x_2 = 0$, e dunque una sua base è costituita dai due vettori

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che questa base è già un sistema di vettori ortogonali. Per concludere l'esercizio basta normalizzarli:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. Sia M una matrice $n \times n$ le cui colonne sono un insieme di vettori ortonormali. Spiegare perché M è invertibile.

Sol. Dalla definizione di prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ e dal fatto che le colonne di M sono un sistema di vettori ortonormali segue $M^T M = \mathrm{Id}_n$, dove M^T indica la matrice trasposta di M e Id_n la matrice identica $n \times n$ (verificarlo!). Ma allora $\det(M^T M) = 1$ e, dal teorema di Binet,

$$\det M^T \cdot \det M = 1$$

da cui $\det M \neq 0$, ovvero M è invertibile. In particolare, poiché $\det M^T = \det M$, si ha $(\det M)^2 = 1$, da cui $\det M = 1$ oppure $\det M = -1$.

14. Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e sia $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonale di U. Sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale e sia $\{v_1, \ldots, v_h\}$ una base ortogonale di $U^\perp$.
    (i) Far vedere che $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_h\}$ è un insieme di vettori ortogonali.
    (ii) Far vedere che sono una base di $\mathbf{R}^n$.

Sol. (i) L'unica cosa da verificare è che si abbia $u_i \cdot v_j = 0$ per ogni i, j, ma questo è ovvio in quanto $u_j \in U$ e $v_j \in U^\perp$.
(ii) Sappiamo che $\mathbf{R}^n = U + U^\perp$ e che questa somma è diretta, ovvero $U \cap U^\perp = 0$. Da $\mathbf{R}^n = U + U^\perp$ segue che $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_h\}$ genera tutto $\mathbf{R}^n$. Per mostrare che questo insieme di vettori è una base, osserviamo che dalla formula di Grassmann

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(U + U^\perp) + \dim(U \cap U^\perp)$$

segue $k + h = n$ e dunque $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_h\}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{R}^n$ avente cardinalità uguale alla dimensione di $\mathbf{R}^n$, cioé è una base di $\mathbf{R}^n$.