Geometria 2 (Ingegneria Meccanica L.S.) (Geatti) 2^o esonero Roma 15 febbraio 2008, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7,5 punti.

1. *Sia data la superficie* $S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ v \end{pmatrix}$, $u, v \in \mathbf{R}$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - *(a) Verificare che il punto P appartiene ad S.*
   - *(b) Determinare due curve su S passanti per P.*
   - *(c) Verificare che il piano tangente ad S in P è un piano verticale.*

(a) Il punto P appartiene ad S: infatti $P = S(0,1)$.
(b) $S(u,1) = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S(0,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$, $S(t,t+1) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ t+1 \end{pmatrix}$, $S(t,1-t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ 1-t \end{pmatrix}$ sono tutte curve su S passanti per P.
(c) Il piano tangente ad S in P è il piano

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

di equazione $x_2 = 0$. Quindi è un piano verticale.
N.B. La superficie è un cilindro retto, quindi tutti i piani tangenti ad S sono piani verticali...

2. *Giustificare perché le superfici di* $\mathbf{R}^3$

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}, \qquad T(u,v) = \begin{pmatrix} \sin u \cosh v \\ \cos u \cosh v \\ v \end{pmatrix}, \qquad C: \quad x^2+y^2 = 1$$

non sono localmente isometriche (non è necessario fare calcoli: aiutarsi con i disegni delle superfici).

Le superfici S, T, e C sono ripettivamente un paraboloide ellittico, un catenoide e un cilindro circolare retto. I punti di S sono tutti ellittici, quelli di T tutti iperbolici e quelli di C tutti parabolici. In particolare, la curvatura gaussiana di S è positiva in ogni punto, quella di T negativa in ogni punto e quella di C identicamente nulla. Ne segue che le superfici sono a due a due *non localmente isometriche.*

3. *Sia S la superficie in* $\mathbf{R}^3$ *data da* $S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ v \end{pmatrix}$, $u, v \in \mathbf{R}$.
   - *(a) Verificare che S è una superficie rigata sviluppabile.*
   - *(b) Di quale tipo di superficie rigata sviluppabile si tratta? Farne un disegno approssimativo.*
   - *(c) Quanto vale la curvatura gaussiana di S?*

(a) Scrivendo $S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si vede che S è una superficie rigata $S(u,v) = Q(u) + vR(u)$ con $Q'(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $R'(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché Q', R, R' sono complanari, ne segue che S è sviluppabile.

(b) S è il cilindro retto avente la cubica $\begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ come curva direttrice ed è una superficie regolare in ogni punto.
(c) La curvatura gaussiana di una superficie rigata sviluppabile è identicamente nulla. Tale superficie è infatti localmente isometrica ad una regione del piano e dunque deve avere la sua stessa curvatura gaussiana. Ad ogni modo, dai calcoli della prima e della seconda forma quadratica fondamentale troviamo

$$E = 1 + 9u^4, \quad G \equiv 1, \quad F \equiv 0, \qquad e = \frac{-6u}{1 + 9u^4}, \quad f \equiv g \equiv 0,$$

da cui

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0.$$

4. *Sia data la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t + 2 \\ t \end{pmatrix}$, *per* $t \in [0, 4\pi]$.
   (a) *Scrivere una parametrizzazione della superficie* S *ottenuta ruotando* γ *intorno all'asse* x_3. *Disegnare* S.
   (b) *Indicare nella figura i punti ellittici e i punti iperbolici, giustificando bene la risposta.*
   (c) *Determinare le linee di curvatura di* S *e indicarle nella figura.*

(a) Una parametrizzazione di S è data da $S(t, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta(\cos t + 2) \\ \cos\theta(\cos t + 2) \\ t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in [0, 4\pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.
(b) I coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale di S risultano

$$e = (cost + 2)/\sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad f \equiv 0, \quad g = cost/\sqrt{1 + \sin^2 t}$$

e la curvatura gaussiana di S ha lo *stesso segno* di

$$eg = \frac{(cost + 2)cost}{(1 + \sin^2 t)}.$$

Dunque i punti $S(\theta, t)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in [0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 5\pi/2[\cup]7\pi/2, 4\pi]$ sono *ellittici*, i punti $S(\theta, t)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in \{\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2\}$ sono *parabolici* e i rimanenti punti $S(\theta, t)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in]\pi/2, 3\pi/2[\cup]5\pi/2, 7\pi/2[$ sono *iperbolici*.
(c) Poiché S è una superficie di rotazione, vale $F = f \equiv 0$. Di conseguenza le linee di curvatura di S coincidono con le linee coordinate. Sono i paralleli $S(t_0, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta(\cos t_0 + 2) \\ \cos\theta(\cos t_0 + 2) \\ t_0 \end{pmatrix}$, al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$, e i meridiani $S(t, \theta_0) = \begin{pmatrix} \sin\theta_0(\cos t + 2) \\ \cos\theta_0(\cos t + 2) \\ t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in [0, 4\pi]$.