Geometria 2 (Ingegneria Meccanica L.S.) (Geatti) 1^o esonero Roma 25 gennaio 2008, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Sia data la forma quadratica* $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3$.
   (a) Determinare una forma canonica metrica di Q.
   (b) Determinare un cambiamento di coordinate isometrico di $\mathbf{R}^3$ *che la porti in tale forma.*
   (c) Determinare massimo e minimo di Q *sulla sfera unitaria* $S = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ *e dire su quali vettori di* S *sono assunti.*

(a) Scriviamo Q in forma matriciale come $Q(X) = {}^tXAX$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$ (necessariamente reali perche' A è simmetrica) e sono dati da $\lambda = 1, 3, -1$. Ne segue che una forma *canonica metrica* di Q è data da

$$Q(Y) = y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2.$$

(b) I rispettivi autospazi sono dati da

$$V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad V_3 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad V_{-1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Un cambiamento di coordinate isometrico di $\mathbf{R}^3$ che porta Q in tale forma è dato da

$$X = MY, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice M è una matrice ortogonale (soddisfa ${}^tMM = Id$) e definisce appunto un cambiamento di coordinate isometrico.
(c) Il massimo e minimo di Q sulla sfera unitaria $S = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ sono $M = 3$ ed $m = -1$ e sono assunti rispettivamente sui vettori di V_3 e di V_1 di norma uno: $\pm \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ e $\pm \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

2. *Sia data la curva piana* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$, *per* $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare la lunghezza del tratto di curva parametrizzato dall'intervallo $[-\infty, \pi]$.
   (b) Disegnare l'arco di curva $\gamma(I)$, *parametrizzato dall'intervallo* $I = [0, \pi/2]$ *e la sua immagine tramite l'isometria* $S(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (c) Che relazione c'e' tra la curvatura con segno di γ *e quella di* $S(\gamma)$*?*

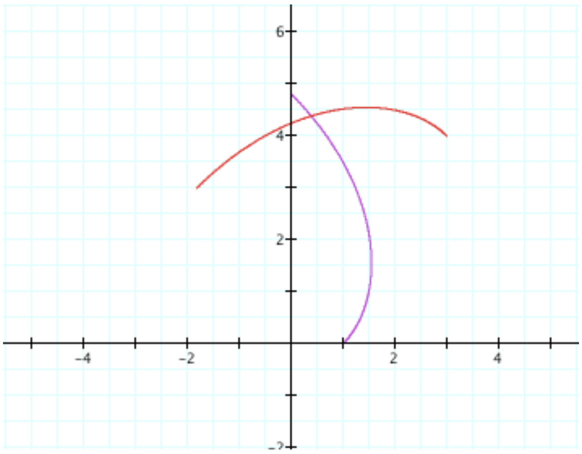
(a) La curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$, è la spirale logaritmica percorsa in senso antiorario al crescere di t. Da

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(t)\| = e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} = \sqrt{2}e^t,$$

abbiamo

$$L_\gamma[-\infty, \pi] = \int_{-\infty}^{\pi} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t|_{-\infty}^{\pi} = \sqrt{2}e^\pi.$$

(b) L'isometria S è data dalla rotazione di un angolo $\theta = \pi/2$ in senso antiorario seguita da una traslazione di passo $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$:

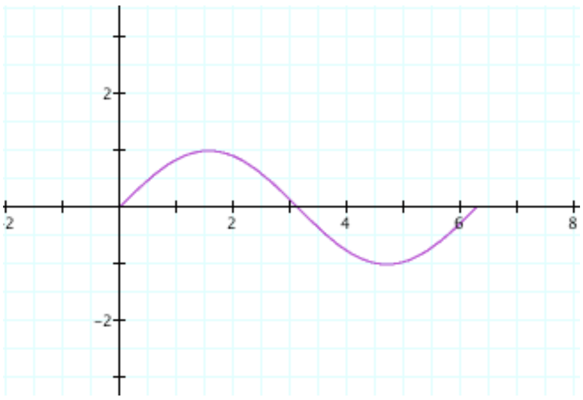


L'arco di spirale $\gamma[0, \pi/2]$ e la sua trasformata $S(\gamma[0, \pi/2])$.

(c) La curvatura con segno di γ è positiva e coincide con la curvatura "assoluta". Poiché $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la curvatura con segno di γ e di $S(\gamma)$ coincidono.

3. *Sia data la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$, *per* $t \in]0, 2\pi[$.
   (a) Calcolare la curvatura con segno κ_s *di* γ.
   (b) Determinare e disegnare il cerchio osculatore a γ *nei punti in cui il valore assoluto di* κ_s *è massimo.*
   (c) Determinare l'evoluta di γ *e farne un disegno approssimativo.*

(a) La curva γ è il grafico della funzione $f(t) = \sin t$, per $t \in]0, 2\pi[$.



Dall'andamento della curva al crescere di t si vede intanto che la curvatura con segno è negativa per $t \in]0, \pi[$, positiva per $t \in]\pi, 2\pi[$ e nulla in $t = \pi$. Dai calcoli

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \cos^2 t} \not\equiv 1,$$

risulta che γ non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Per il calcolo della curvatura usiamo le formule rispetto ad una parametrizzazione qualunque e troviamo

$$\kappa(t) = \frac{|\sin t|}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}. \tag{$*$}$$

Poiché

$$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \det(\begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \end{pmatrix}) = -\sin t \begin{cases} < 0, \ t \in]0, \pi[\\ > 0, \ t \in]\pi, 2\pi[\\ 0, \ t = \pi \end{cases}$$

la curvatura con segno risulta

$$\kappa_s(t) = \frac{-\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}},$$

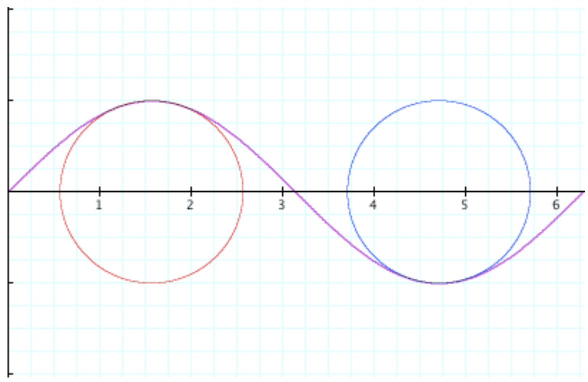
come previsto.

(b) La curvatura di γ (ossia il valore assoluto della curvatura con segno) è massima per $t = \pi/2, 3\pi/2$ (quando in (*) il numeratore è massimo e il denominatore è minimo) e vale 1. In questi punti il cerchio osculatore ha raggio 1 e centro dato rispettivamente da

$$\gamma(\pi/2) + 1\mathbf{n}(\pi/2) = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(3\pi/2) + 1\mathbf{n}(3\pi/2) = \begin{pmatrix} 3\pi/2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: Dalle osservazioni fatte sull'andamento della curva si vede subito che per $t = \pi/2, 3\pi/2$, il versore tangente e il versore noramle sono dati rispettivamente da

$$\mathbf{t}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{n}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{t}(3\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{n}(3\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

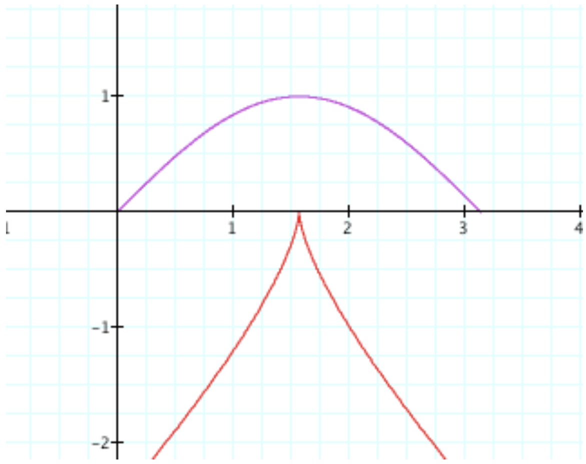


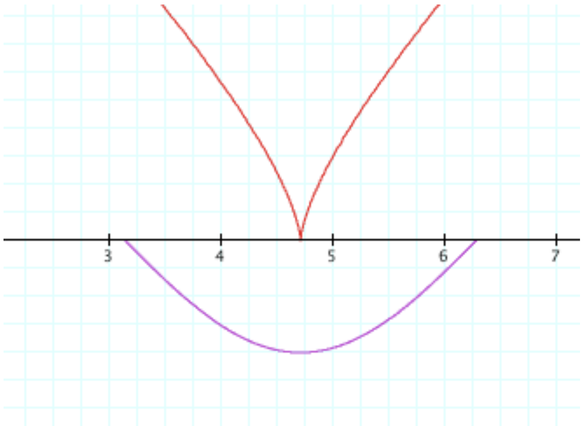
(c) In generale, al variare di t, il versore tangente e il versore normale sono dati rispettivamente da

$$\mathbf{t}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} / \sqrt{1 + \cos^2 t}, \quad \mathbf{n}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{1 + \cos^2 t}, & t \in]0, \pi[\\ \begin{pmatrix} -\cos t \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{1 + \cos^2 t}, & t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

L'equazione dell'evoluta è data da

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix} + \frac{1 + \cos^2 t}{|\sin t|} \begin{pmatrix} \cos t \\ -1 \end{pmatrix}, & t \in]0, \pi[\\ \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix} + \frac{1 + \cos^2 t}{|\sin t|} \begin{pmatrix} -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}, & t \in]\pi, 2\pi[\end{cases}.$$





4. *Sia data la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t - t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, *con* $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare il piano osculatore a γ *in* $\gamma(0)$.
   (b) Determinare se la curva γ *è piana.*
   (c) Calcolare la torsione di γ.

(a) Calcoliamo intanto

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6t \end{pmatrix}, \quad \gamma'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \gamma' \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 6t-6t^2 \\ -6t \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Il piano osculatore a γ in $\gamma(0)$ è il piano per $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e ortogonale al vettore $\gamma' \wedge \gamma''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. È quindi il piano orizzontale $x_3 = 0$. (In forma parametrica tale piano è dato da

$$X = \gamma(0) + \alpha\gamma'(0) + \beta\gamma''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Anche in questo caso si vede che coincide col piano orizzontale (x_1, x_2).)
(b) Si vede subito che la curva non è interamente contenuta nel piano osculatore in $\gamma(0)$: basta prendere $t \neq 0$ e il punto $\gamma(t)$ non è contenuto in tale piano. Dunque la curva non è piana.
(c) A conferma di ciò, la torsione di γ è data da

$$\tau(t) = \frac{12}{(6t-6t^2)^2 + 36t^2 + 4} \not\equiv 0.$$