Geometria 2 (Ingegneria Meccanica L.S.) (Geatti) 1° appello Roma 15 febbraio 2008, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7,5 punti.

1. *Sia data la forma quadratica* $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2$.
   (a) Determinare una forma canonica metrica di Q.
   (b) Determinare un cambiamento di coordinate isometrico di $\mathbf{R}^3$ *che la porti in tale forma.*
   (c) Determinare massimo e minimo di Q *sulla sfera unitaria* $S = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ *e dire su quali vettori di* S *sono assunti.*

(a) Scriviamo Q in forma matriciale come $Q(X) = {}^tXAX$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $p_\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)$ (necessariamente reali perche' A è simmetrica) e sono dati da $\lambda = 1, -1, 0$. Ne segue che una forma *canonica metrica* di Q è data da

$$Q(Y) = y_1^2 - y_2^2.$$

(b) I rispettivi autospazi sono dati da

$$V_1 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad V_{-1} = \text{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad V_0 = \text{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Un cambiamento di coordinate isometrico di $\mathbf{R}^3$ che porta Q in tale forma è dato da

$$X = MY, \quad M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice M è una matrice ortogonale (soddisfa ${}^tMM = Id$) e definisce appunto un cambiamento di coordinate isometrico.
(c) Il massimo e minimo di Q sulla sfera unitaria $S = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid \|X\| = 1\}$ sono $M = 1$ ed $m = -1$ e sono assunti rispettivamente sui vettori di V_1 e di V_{-1} di norma uno: $\pm \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\pm \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. *Sia data la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$, *per* $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Disegnare γ *e indicarne il senso di percorrenza.*
   (b) Determinare la curvatura con segno di γ *al variare di* t.
   (c) Determinare il cerchio osculatore nel punto di curvatura massima e fare uno schizzo approssimativo della evoluta di γ *(anche senza fare i calcoli esatti, purché la risposta sia giustificata).*

N.B. $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

(a) La curva γ è il ramo di iperbole $x_1^2 - x_2^2 = 1$ che si trova nel semipiano $x_1 > 0$ (infatti $\cosh t > 0$, per ogni t) ed è percorsa "in senso orario".
(b) Abbiamo

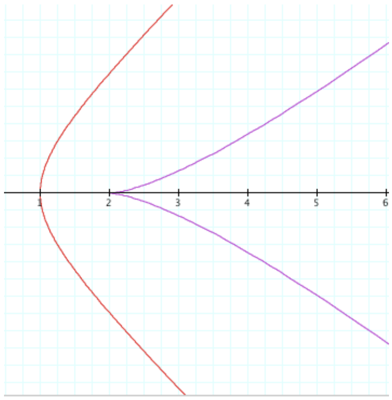
$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 2\sinh^2 t} \not\equiv 1.$$

Dunque γ è una curva regolare non parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Dalle formule generali troviamo che la curvatura con segno e la curvatura di γ sono date da

$$\kappa_s(t) = -\frac{1}{(\sqrt{1 + 2\sinh^2 t})^3}, \qquad \kappa(t) = \frac{1}{(\sqrt{1 + 2\sinh^2 t})^3}.$$

Sono l'una l'opposta dell'altra perché γ è percorsa in senso orario.
(c) La curvatura è massima per $t = 0$ e vale $\kappa(0) = 1$. Il cerchio osculatore in $\gamma(0)$ è un cerchio di raggio 1 e centro $C(0) = \gamma(0) + \frac{1}{\kappa(0)} n(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'evoluta di γ è data da

$$\epsilon(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix} + (\sqrt{1 + 2\sinh^2 t})^3 \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sinh^2 t}} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix} + (1 + 2\sinh^2 t) \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \end{pmatrix}.$$



3. *Sia S la superficie in $\mathbf{R}^3$ data da $S(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ v \end{pmatrix}$, $u, v \in \mathbf{R}$.*
   (a) Verificare che S è una superficie rigata sviluppabile.
   (b) Di quale tipo di superficie rigata sviluppabile si tratta? Farne un disegno approssimativo.
   (c) Quanto vale la curvatura gaussiana di S?

(a) Scrivendo $S(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si vede che S è una superficie rigata $S(u, v) = Q(u) + vR(u)$ con $Q'(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $R'(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché Q', R, R' sono complanari, ne segue che S è sviluppabile.
(b) S è il cilindro retto avente la cubica $\begin{pmatrix} u \\ u^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ come curva direttrice ed è una superficie regolare in ogni punto.
(c) La curvatura gaussiana di una superficie rigata sviluppabile è identicamente nulla. Tale superficie è infatti localmente isometrica ad una regione del piano e dunque deve avere la sua stessa curvatura gaussiana. Ad ogni modo, dai calcoli della prima e della seconda forma quadratica fondamentale troviamo

$$E = 1 + 9u^4, \quad G \equiv 1, \quad F \equiv 0, \qquad e = \frac{-6u}{1 + 9u^4}, \quad f \equiv g \equiv 0,$$

da cui

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0.$$

4. *Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t + 2 \\ t \end{pmatrix}$, per $t \in [0, 4\pi]$.*

(a) Scrivere una parametrizzazione della superficie S ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3. Disegnare S.
(b) Indicare nella figura i punti ellittici e i punti iperbolici, giustificando bene la risposta.
(c) Determinare le linee di curvatura di S e indicarle nella figura.

(a) Una parametrizzazione di S è data da $S(t,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta(\cos t + 2) \\ \cos\theta(\cos t + 2) \\ t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in [0, 4\pi]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.
(b) I coefficienti della seconda forma quadratica fondamentale di S risultano

$$e = (cost + 2)/\sqrt{1 + \sin^2 t}, \quad f \equiv 0, \quad g = cost/\sqrt{1 + \sin^2 t}$$

e la curvatura gaussiana di S ha lo *stesso segno* di

$$eg = \frac{(cost + 2)cost}{(1 + \sin^2 t)}.$$

Dunque i punti $S(\theta, t)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in [0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 5\pi/2[\cup]7\pi/2, 4\pi]$ sono *ellittici*,
i punti $S(\theta, t)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in \{\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2\}$ sono *parabolici* e i rimanenti punti $S(\theta, t)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $t \in]\pi/2, 3\pi/2[\cup]5\pi/2, 7\pi/2[$ sono *iperbolici*.
(c) Poiché S è una superficie di rotazione, vale $F = f \equiv 0$. Di conseguenza le linee di curvatura di S coincidono con le linee coordinate. Sono i paralleli $S(t_0, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta(\cos t_0 + 2) \\ \cos\theta(\cos t_0 + 2) \\ t_0 \end{pmatrix}$, al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$,
e i meridiani $S(t, \theta_0) = \begin{pmatrix} \sin\theta_0(\cos t + 2) \\ \cos\theta_0(\cos t + 2) \\ t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in [0, 4\pi]$.