GEOMETRIA 1 (Geatti) ESONERO 2 Roma, 29 novembre 2005, ore 14.30–16.30.

COGNOME .... *NOME* .... data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1.(a) Sia $F\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Dare la definizione di autospazio di F di autovalore λ.

(b) Verificare che se $\mathbf{v}$ è autovettore di F di autovalore λ, allora $\mathbf{v}$ è anche autovettore dell'applicazione composta $F^3 = F \circ F \circ F$. Di quale autovalore ?

(c) Sia $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$, data da $F\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 2&2&2&2&2\\ 2&2&2&2&2\\ 3&3&3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$ e sia $Z = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. Determinare se Z è autovettore di F.

(a) L'autospazio di $F\colon V \to V$ di autovalore λ è l'insieme dei vettori mandati da F in λ volte se stessi:

$$V_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}.$$

(b) Se $F(v) = \lambda v$, allora

$$F \circ F \circ F(v) = F(F(F(v))) = F(F(\lambda v)) = F(\lambda^2 v) = \lambda^3 v.$$

In altre parole, v è autovettore di F^3 di autovalore λ^3.

(c)

$$F\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 2&2&2&2&2\\ 2&2&2&2&2\\ 3&3&3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\\ 9\\ 18\\ 18\\ 27\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Dunque Z è autovettore di F di autovalore $\lambda = 9$.

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 3&1\\ 0&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1&0\\ 2&2\end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&2\\ 0&0&1\end{pmatrix}$.

(a) Calcolare $\det(A^{100}B^tA^{-1})$. (Qui B^t indica la trasposta di B).

(b) Dire se C è invertibile. Determinare, se esiste, C^{-1}.

(a) $\det A = 3$, $\det B = 2$,

$$\det(A^{100}B^tA^{-1}) = (\det A)^{100}\det B^t \det A^{-1} = (\det A)^{99}\det B = 3^{99}2.$$

(b) $\det C = 1 \neq 0$, quindi C è invertibile. L'inversa si puøcalcolare con il metodo di eliminazione di Gauss, oppure direttamente con le formule. Risulta

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 0&1&-2\\ 0&0&1\end{pmatrix}, \qquad \text{Prova:} \quad \begin{pmatrix} 1&-1&1\\ 0&1&-2\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&2\\ 0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}.$$

3. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&1\\ 2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base del nucleo $\ker F$ e una base dell'immagine $F(\mathbf{R}^3)$.

(b) Sia $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_2 \}$. Determinare una base dell'immagine $F(U)$ di U.

(c) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

(a) Il nucleo di F è dato dallo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendolo troviamo

$$\ker F = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

Una base di $\ker F$ è data da $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$. L'immagine di F è generata dalle colonne della matrice rappresentativa:

$$F(\mathbf{R}^3) = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

La matrice ha rango due, uguale alla dimensione dell'immagine di F, e i vettori $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ sono una base di $F(\mathbf{R}^3)$.

(b) Si ha $U = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, e $\dim U = 2$. Inoltre

$$F(U) = \operatorname{span}\{ F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \};$$

dunque $\dim F(U) = \dim U = 2$ e di conseguenza $\dim U \cap \ker F = \dim U - \dim F(U) = 0$.

4. Sia $F \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare autovalori e autospazi di F.

(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti e dire se F è diagonalizzabile.

(c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(a) Il polinomio caratteristico di A è dato da $P_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$ ed ha radici $\lambda = 0$, doppia, e $\lambda = 2$. Gli autospazi corrispondenti sono dati da

$$V_0 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \} = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \},$$

e

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \} = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(b) Poiché $\dim V_0 = \dim V_2 = 1$, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti contiene 2 autovettori $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 \in V_0$ e $v_2 \in V_2$; ad esempio

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

In particolare, non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di Fe l'applicazione F non è diagonalizzabile. Osserviamo che $\dim V_0 = 1$, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è due.

(c) Poiché $\dim \ker F = \dim V_0 = 1 > 0$, l'applicazione F non è iniettiva, né suriettiva: infatti $\dim F(\mathbf{R}^3) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \ker F < 3$. Da cui neanche biiettiva.