COGNOME .... *NOME* .... data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1.*(a) Disegnare i sottoinsiemi* $S_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 + 4x_2 = 0\}$ *ed* $S_2 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t > 0\}$.

(b) Scrivere la definizione di sottospazio di uno spazio vettoriale.

(c) Determinare se S_1 *e* S_2 *sono sottospazi vettoriali di* $\mathbf{R}^2$ *(dimostrare che lo sono o che non lo sono).*

(a) L'insieme $S_1 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ è la retta per l'origine parallela al vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'insieme S_2 è la semiretta uscente dall'origine (origine esclusa) formata dai vettori paralleli a $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e con lo stesso verso.

(b) Un sottospazio S di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non vuoto chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare:

$$s_1 + s_2 \in S, \quad \forall s_1, s_2 \in S; \qquad \lambda s \in S, \quad \forall s \in S, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

(c) L'insieme S_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$: infatti per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ e $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ che soddisfano l'equazione di S_1 (ossia $a_1 + 4a_2 = 0$ e $b_1 + 4b_2 = 0$) si ha che

$$(\lambda a_1 + \mu b_2) + 4(\lambda a_1 + \mu b_2) = \lambda(a_1 + 4a_2) + \mu(b_1 + 4b_2) = 0 + 0 = 0.$$

L'insieme S_2 invece non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$: innanzitutto non contiene il vettore nullo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre, per ogni $\lambda < 0$, si ha che $\lambda t < 0$ e dunque il vettore $\lambda t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non appartiene ad S_2.

2. *Siano dati i sottospazi* $U = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ *e* $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0\}$ *in* $\mathbf{R}^4$.

(a) Determinare una base di $U \cap W$*. Che dimensione ha* $U \cap V$*?*

(b) Calcolare la dimensione di $U + W$*.*

(c) Dire se U *è contenuto in* W *(spiegare la risposta).*

(a) Il generico elemento di U è un vettore della forma $u = \begin{pmatrix} b \\ a+b \\ 0 \\ a+b \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbf{R}$. Sostituendo le coordinate di u nell'equazione che definisce W, troviamo la relazione $b + (a+b) = 0$, ossia $a = -2b$. Dunque l'intersezione $U \cap W$ è data dai vettori della forma $\begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$, con $b \in \mathbf{R}$. In altre parole $U \cap W = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed ha dimensione 1.

(b) Si che $\dim U \cap W = 1$, $\dim U = 2$, poiché $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ sono due generatori linearmente indipendenti di U); infine $\dim W = 3$, poiché W è lo spazio delle soluzioni di una equazione lineare omogenea non banale in 4 incognite. Dalle formule di Grassmann, si ha che

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 3 - 1 = 4.$$

In particolare, $U + W = \mathbf{R}^4$.
(c) Se valesse $U \subset W$, si avrebbe $\dim U \cap W = \dim U = 2$, mentre sappiamo che $\dim U \cap W = 1$. Dunque $U \not\subset W$. Ad ogni modo è anche evidente che il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, ma $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$. bn

3. Sia dato il sottospazio $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ *in* $\mathbf{R}^3$.
(a) Verificare che $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ *è una base di* W.
(b) Completare $\mathcal{B}$ *ad una base di* $\mathbf{R}^3$.
(c) Verificare che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *appartiene a* W *e completarlo ad una base di* W.

(a) Risulta $\dim W = 2$ (è soluzione di una equazione omogenea non banale in $\mathbf{R}^3$). I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti (non sono collineari) ed appartengono a W, in quanto ne soddisfano l'equazione. Dunque $\mathcal{B}$ è una base di W.
(b) Un completamento di $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbf{R}^3$ è dato ad esempio da

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

I tre vettori qui sopra sono chiaramente linearmente indipendenti (sono a scala) e formano una base di $\mathbf{R}^3$.
(c) Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a W, in quanto ne soddisfa l'equazione. Per completarlo ad una base di W, abbiamo bisogno di un altro vettore di W non collineare a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La coppia $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ è un'altra base di W.

4. Sia $U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$.
(a) Dimostrare che $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ *sono linearmente dipendenti.*
(b) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$ *è una base di* U.
(c) Verificare che $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U$ *e calcolare le sue coordinate in* $\mathcal{B}$.

(a) Consideriamo una combinazione lineare delle matrici $\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ che dia la matrice nulla

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+c & b+c \\ -a+b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il sistema lineare corrispondente $\begin{cases} a+c=0 \\ b+c=0 \\ a-b=0 \end{cases}$ ha infinite soluzioni $a = b = -c,\ c \in \mathbf{R}$, le tre matrici in questione sono linearmente dipendenti. da ciò segue che $\dim U \leq 2$.

(b) Le matrici $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ sono linearmente indipendenti (hanno coefficienti non proporzionali) e appartengono ad U per definizione. Da ció segue che $\dim U \geq 2$. Ma allora la dimensione di U è proprio uguale a 2, e le matrici $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ formano una base di U.

(c) Per dimostrare che $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U$, cerchiamo numeri $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a+b & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ -a + b = 1. \end{cases}$$

È evidente che $a = 1$ e $b = 2$ sono i coefficienti cercati (sono unici in quanto esprimono M come combinazione lineare degli elementi di una base $\mathcal{B}$ di U) e per definizione sono le coordinate di M in $\mathcal{B}$.