GEOMETRIA 1 (Geatti) APPELLO 2 Roma, 6 dicembre 2005, ore 15–17.

COGNOME .... *NOME* .... data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Siano dati $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Dimostrare che $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
(b) Calcolare le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ in $\mathcal{B}$.
(c) Determinare (in base canonica) il vettore $\mathbf{v}$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$.

(a) I tre vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sono linearmente indipendenti: infatti il determinate della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a due, diverso da zero. Poiché la dimensione di $\mathbf{R}^3$ è uguale a tre, ogni tripla di vettori indipendenti in $\mathbf{R}^3$ costituisce una base di $\mathbf{R}^3$. In aprticolare, $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
(b) Le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ in $\mathcal{B}$ sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infatti $\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$, $\quad \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$, $\quad \mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$, $\quad \mathbf{v}_4 = 0\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$.
(c) Il vettore $\mathbf{v}$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{B}$ è dato (in base canonica) da

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Siano $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e $G\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ le applicazioni lineari date rispettivamente da

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare l'applicazione composta $F \circ G$.
(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di $F \circ G$.
(c) Sia U un sottospazio complementare a $\ker(F \circ G)$ nel dominio di $F \circ G$. Quanto vale $\dim(F \circ G)(U)$?

(a) L'applicazione composta $F \circ G$ è l'applicazione data dalla moltiplicazione per la matrice

$$M_F \cdot M_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Il nucleo di $F \circ G$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Risolvendo troviamo

$$\ker(F\circ G) = \text{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$$

e il vettore $\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\}$ è una sua base. Una base dell'immagine di $F\circ G$ è data da un insieme massimale di vettori colonna linearmente indipendenti nella matrice rappresentativa di $F\circ G$. In questo caso $\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\}$.

(c) Poiché $\dim\ker(F\circ G) = 1$, un suo complementare in $\mathbf{R}^3$ è una sottospazio U di dimensione 2, che soddisfa $U\cap\ker(F\circ G) = \{O\}$. Dunque $F\circ G$, ristretta ad U, è iniettiva . Dalla formula

$$\dim U = \dim U\cap\ker(F\circ G) + \dim(F\circ G)(U)$$

segue che $\dim(F\circ G)(U) = \dim U = 2$.

3. Siano $U = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$ e $W = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases}x_2 = 0\\ x_3 - x_2 = 0\end{cases}\}$. Sia $F\colon\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ un'applicazione lineare che ha U come autospazio di autovalore $\lambda = 1$ e W come autospazio di autovalore $\lambda = 2$.
(a) Determinare $\dim(U+W)$ e $\dim U\cap W$.
(b) Dire se F è diagonalizzabile (giustificare bene la risposta).
(c) Dire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile (giustificare bene le risposte).

(a) I sottospazi U e W sono autospazi di autovalori distinti di F. Dunque $U\cap W = \{O\}$. Questo si può anche verificare direttamente, mettendo a sistema le equazioni che definiscono U con quelle che definiscono W. Poiché $\dim U = 2$ (una equazione omogenea non banale in tre variabili) e $\dim W = 1$ (due equazioni omogenee indipendenti in tre variabili), $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U\cap W = 3$.

(b) F è diagonalizzabile, perché la somma delle dimensionim degli autospazi è uguale a tre. Questo garantisce l'esistenza di una base di $\mathbf{R}^3$, fatta di autovettori di F. Ad esempio

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

(c) F è iniettiva, poiché $\lambda = 0$ non è autovalore di F (ricordare che l'autospazio di $\lambda = 0$ è esattamente il nucleo di F). In questo caso la dimensione del dominio è uguale alla dimensione del codominio e vale

$$\dim\mathbf{R}^3 = \dim\ker F + \dim F(\mathbf{R}^3).$$

Ne segue che F è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è biiettiva.

4.(a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.
Sia $f:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
(b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

(a) I vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ non sono uno multiplo dell'altro, quindi sono linearmente indipendenti. (Il determinante della matrice che li ha come righe o come colonne ha determinante non nullo).

(b) La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ ha nelle sue colonne le coordinate di $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ e di $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$ nella base $\mathcal{B}$. Quindi è data da

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2, \mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^2, \mathcal{C} \\ \Big\downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \Big\uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^2, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & \mathbf{R}^2, \mathcal{B} \end{array}$$

dove $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica e $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$. Da esso si ricava

$$A = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \widetilde{A} C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$