GEOMETRIA 1 (Geatti) APPELLO 1 Roma, 29 novembre 2005, ore 14.30–16.30.

COGNOME .... *NOME* .... data di nascita..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1.(a) Sia $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0\}$. Determinare se $\mathcal{A} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ è una base di W.

(b) Completare $\mathcal{A}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$.

(c) Determinare un sottospazio complementare a W in $\mathbf{R}^4$

(a) Osserviamo innanzitutto che W è dato dalle soluzioni di un'equazione omogenea non banale in $\mathbf{R}^4$ e dunque $\dim W = 3$. I vettori di $\mathcal{A}$ appartengono a W e sono linearmente indipendenti. Non sono una base di W perché generano un sottospazio proprio di W di dimensione due.

(b) Completare $\mathcal{A}$ ad una base di $\mathbf{R}^4$ significa trovare altri due vettori di $\mathbf{R}^4$ in modo che insieme ai vettori di $\mathcal{A}$ formino una quaterna linearmente indipendente, e dunque una base di $\mathbf{R}^4$. Ad esempio, i vettori $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$. Si verifica facilmente che

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

sono linearmente indipendenti:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

2.(a) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare $L: V \longrightarrow W$.

(b) Dimostrare che $\ker L$, il nucleo di L, è un sottospazio vettoriale di V.

(c) Scrivere un'applicazione lineare $L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ il cui nucleo $\ker L$ coincide con $\mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

(a) Il nucleo di un'applicazione lineare $L: V \longrightarrow W$ è l'insieme dei vettori di V che hanno immagine O (lo zero di W) tramite L:

$$\ker L = \{v \in V \mid L(v) = O\}.$$

(b) Facciamo vedere che dati $u, v \in \ker V$ e $a, b \in \mathbf{R}$, allora un'arbitraria combinazione lineare $au + bv$ appartiene ancora a $\ker L$: infatti

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v) = aO + bO = O.$$

(c) Tutte le applicazioni lineari della forma

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soddisfano le condizioni richieste. Dalle colonne di $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, si vede che l'immagine di L coincide con $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\} \neq \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; dunque il nucleo di L contiene $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ed ha dimensione 1. Quindi coincide con $\operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

3. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base del nucleo $\ker F$ e una base dell'immagine $F(\mathbf{R}^3)$.

(b) Sia $U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$. Determinare una base dell'immagine $F(U)$ di U.

(c) Determinare la dimensione di $U \cap \ker F$.

(a) Il nucleo di F è dato dallo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendolo troviamo

$$\ker F = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Una base di $\ker F$ è data da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. L'immagine di F è generata dalle colonne della matrice rappresentativa:

$$F(\mathbf{R}^3) = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

La matrice ha rango due, uguale alla dimensione dell'immagine di F, e i vettori $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ sono una base di $F(\mathbf{R}^3)$.

(b) Si ha $U = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, e $\dim U = 2$. Inoltre

$$F(U) = \operatorname{span}\{F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})\} = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\};$$

dunque $\dim F(U) = \dim U = 2$ e di conseguenza $\dim U \cap \ker F = \dim U - \dim F(U) = 0$.

4. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare autovalori e autospazi di F.

(b) Determinare un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti e dire se F è diagonalizzabile.

(c) Determinare se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(a) Il polinomio caratteristico di A è dato da $P_\lambda(A) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$ ed ha radici $\lambda = 0$, doppia, e $\lambda = 2$. Gli autospazi corrispondenti sono dati da

$$V_0 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \},$$

e

$$V_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

(b) Poiché $\dim V_0 = \dim V_2 = 1$, un insieme massimale di autovettori linearmente indipendenti contiene 2 autovettori $\{v_1, v_2\}$, con $v_1 \in V_0$ e $v_2 \in V_2$; ad esempio

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

In particolare, non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di Fe l'applicazione F non è diagonalizzabile. Osserviamo che $\dim V_0 = 1$, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è due.
(c) Poiché $\dim \ker F = \dim V_0 = 1 > 0$, l'applicazione F non è iniettiva, né suriettiva: infatti $\dim F(\mathbf{R}^3) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \ker F < 3$. Da cui neanche biiettiva.