1. Siano date le superfici dello spazio

$$\mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbf{R}.$$

(cosa sono?? disegnarle)

(a) Verficare che i coefficienti della prima forma fondamentale sia di $\mathbf{T}$ che di $\mathbf{S}$ sono dati da

$$E(u,v) = G(u,v) \equiv 1, \quad F(u,v) \equiv 0.$$

(b) Calcolare i coefficienti della seconda forma fondamentale di $\mathbf{T}$ e di $\mathbf{S}$.

(c) Verificare che $\mathbf{S}$ è una superficie rigata sviluppabile.

(a) La superficie $\mathbf{T}$ è il piano orizzontale (x_1, x_2), la superficie $\mathbf{S}$ è un cilindro, le cui sezioni orizzontali sono cerchi di raggio uno. Vale

$$\mathbf{T}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_u = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{S}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui $E(u,v) = G(u,v) \equiv 1, \quad F(u,v) \equiv 0$ in entrambi i casi.

(b) È immediato che per $\mathbf{T}$ vale $e \equiv f \equiv g \equiv 0$. Per $\mathbf{S}$ vale

$$\mathbf{S}_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{S}_{vv} = \mathbf{S}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$e(u,v) \equiv -1, \ f(u,v) \equiv g(u,v) \equiv 0.$$

(c) $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $Q(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque è una superficie rigata. Poiché

$$Q(u)' = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r'(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

sono complanari, $\mathbf{S}$ è una superficie rigata sviluppabile. La condizione che i vettori in (*) siano complanari implica che il piano tangente alla superficie in un punto è tangente a tutta la retta che sta sulla superficie e passa per quel punto.

N.B. Il cilindro si srotola su un aperto del piano, senza che su di esso vengano alterati angoli e distanze. Questo non può avvenire però mediante movimenti rigidi di $\mathbf{R}^3$. Infatti le seconda forma fondamentale di $\mathbf{T}$ è identicamente nulla, mentre quella del cilindro è semidefinita (cf. Teorema fondamentale della teoria delle superfici).

2. Sia $S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$, con $u \in [-\pi/2, \pi/2],\ v \in [0, 2\pi]$.

(a) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di $\mathbf{S}$.

(b) Verificare che tutti i punti di $\mathbf{S}$ sono ellittici e umbilicali.

(b) Verificare che $\mathbf{S}$ ha curvatura di Gauss costante $K \equiv 1$.

La superficie $\mathbf{S}$ è la sfera di centro l'origine e raggio 1.

$$S_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad S_v = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

$$S_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}, \quad S_{vv} = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_{uv} = \begin{pmatrix} \sin u \sin v \\ -\sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$E(u,v) \equiv 1, \quad F(u,v) \equiv 0, \quad G(u,v) = \cos^2 u.$$

$$e(u,v) \equiv -1, \quad f(u,v) \equiv 0, \quad g(u,v) = -\cos^2 u.$$

Per ogni punto P sulla sfera ed ogni curva γ sulla sfera passante per P, la curvatura normale di γ in P risulta

$$\kappa_N(\gamma, P) \equiv -1.$$

In particolare tutti i punti della sfera sono ellittici, ed in più umbilicali. In ogni punto P sulla sfera la curvatura gaussiana risulta $K(u,v) \equiv 1$.

3. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \end{pmatrix}$, con $t \in (0, \pi)$, e sia $\mathbf{S}$ la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare γ intorno all'asse x_3.
   (a) Verificare che γ è regolare per ogni $t \neq \pi/2$.
   (b) Sia $P(t)$ il punto di intersezione fra la retta tangente a γ in $\gamma(t)$ e l'asse x_3. Verificare che $\|P(t) - \gamma(t)\| \equiv 1$.
   (c) Verificare che $\mathbf{S}$ ha curvatura di Gauss costante $K \equiv -1$.

(a) La curva γ è regolare per ogni $t \neq \pi/2$: infatti, per tali valori di t, risulta $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ -\sin t + \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Il punto di intersezione fra la retta tangente a γ in $\gamma(t)$ e l'asse x_3 è dato da $P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \log(\tan \frac{t}{2}) \end{pmatrix}$. Da cui segue che

$$\|P(t) - \gamma(t)\| = \| \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \| \equiv 1.$$

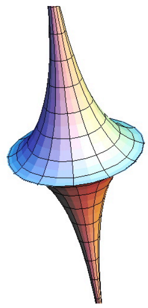
(c) Sia $\mathbf{S}(t, \theta) = \begin{pmatrix} \sin t \cos \theta \\ \sin t \sin \theta \\ \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ la corrispondente superficie di rotazione. Assumiamo $t \neq \pi/2$.

$$\mathbf{S}_t = \begin{pmatrix} \cos t \cos \theta \\ \cos t \sin \theta \\ -\sin t + \frac{1}{\sin t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin t \sin \theta \\ \sin t \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -\cos t \cos \theta \\ -\cos t \sin \theta \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

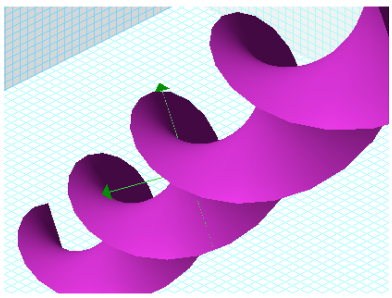
$$\mathbf{S}_{tt} = \begin{pmatrix} -\sin t \cos \theta \\ -\sin t \sin \theta \\ -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2 t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -\sin t \cos \theta \\ -\sin t \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{t\theta} = \begin{pmatrix} \sin t \sin \theta \\ -\sin t \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$E(t,\theta) = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \quad G(t,\theta) = \sin^2 t, \quad F(t,\theta) \equiv 0,$$
$$e(t,\theta) = -\frac{\cos t}{\sin t}, \quad g(t,\theta) = \sin t \cos t, \quad f(t,\theta) \equiv 0.$$

Ne segue che tutti i punti di $\mathbf{S}$ sono iperbolici e che la curvatura gaussiana è data da $K = \frac{eg}{EG} \equiv -1$. Questa superficie si chiama la pseudosfera ed è raffigurata qui sotto.



4. Sia data la superficie $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ (*elicoide*).
   (a) Verificare che $\mathbf{S}$ è una superficie rigata.
   (b) Guardando la figura qui sotto, cosa si può dire intuitivamente della curvatura gaussiana di S? È possibile che $\mathbf{S}$ sia una superficie rigata sviluppabile?
   (c) Determinare (con i calcoli) se $\mathbf{S}$ è una superficie rigata sviluppabile.
   (d) Calcolare la curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$.



(a) $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$, con $Q(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$, $r(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque è una superficie rigata.

(b) Guardando la figura qui sotto, si intuisce che la curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ è negativa. Infatti per ogni punto passano due curve con la concavità rivolta in senso opposto. Quindi $\mathbf{S}$ non è una superficie rigata sviluppabile perche' in tal caso avrebbe curvatura gaussiana identicamente nulla

(c) Poiché

$$Q(u)' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r'(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

non sono complanari (il determinante della matrice che ha questi vettori come colonne è diverso da zero), $\mathbf{S}$ non è una superficie rigata sviluppabile. Guardando la figura, è evidente che il piano tangente alla superficie in un punto non è tangente a tutta la retta che sta sulla superficie e passa per quel punto (come invece succedeva nel caso del cilindro). Vale

$$\mathbf{S}_{uu} = \begin{pmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{vv} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix},$$

da cui $e \equiv g \equiv 0$, $f = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$ e $K(u,v) = -\frac{1}{1+v^2} < 0$.

5. Date la superfici $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ (l'*elicoide*, parametrizzato in modo diverso) e $\mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}$ (*catenoide*). Verificare che hanno la stessa prima forma fondamentale e la stessa curvatura di Gauss. Guardare il filmetto che porta l'elicoide sul catenoide, senza alterare angoli e lunghezze *sulle superfici.*

Per la superficie $\mathbf{S}$ vale

$$\mathbf{S}_u = \begin{pmatrix} -\sinh v \sin u \\ \sinh v \cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_v = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -\frac{\sin u}{\cosh v} \\ \frac{\cos u}{\cosh v} \\ -\frac{\sinh v}{\cosh v} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{uu} = \begin{pmatrix} -\sinh v \cos u \\ -\sinh v \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{vv} = \begin{pmatrix} \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{uv} = \begin{pmatrix} -\cosh v \sin u \\ \cosh v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(u,v) = \cosh^2 v, \quad G(u,v) = \cosh^2 v, \quad F(u,v) \equiv 0.$$

$$e(u,v) \equiv 0, \quad g(u,v) \equiv 0, \quad f(u,v) \equiv 1.$$

$$K(u,v) = -\frac{1}{\cosh^4 v}.$$

Per la superficie $\mathbf{T}$ vale

$$\mathbf{T}_u = \begin{pmatrix} -\cosh v \sin u \\ \cosh v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_v = \begin{pmatrix} \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cosh v} \\ \frac{\sin u}{\cosh v} \\ -\frac{\sinh v}{\cosh v} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{uu} = \begin{pmatrix} -\cosh v \cos u \\ -\cosh v \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{vv} = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{uv} = \begin{pmatrix} -\sinh v \sin u \\ \sinh v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(u,v) = \cosh^2 v, \quad G(u,v) = \cosh^2 v, \quad F(u,v) \equiv 0.$$

$$e(u,v) \equiv -1, \quad g(u,v) \equiv 1, \quad f(u,v) \equiv 0.$$

$$K(u,v) = -\frac{1}{\cosh^4 v}.$$

L'elicoide si stende sul catenoide, senza che su di esso vengano alterati angoli e distanze. Questo non avviene però mediante movimenti rigidi di $\mathbf{R}^3$.