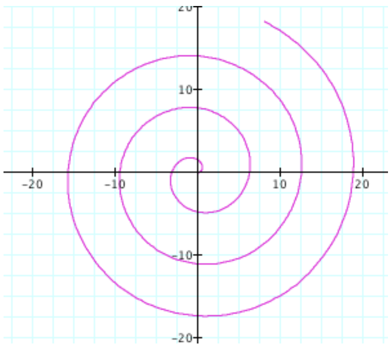
COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7,5 punti.

1. *Sia data la curva piana* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$, *per* $t > 0$.
   (a) Determinare se γ *è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.*
   (b) Fare un disegno approssimativo della curva, indicando in che senso è percorsa.
   (c) Determinare la curvatura e il raggio di curvatura di γ *in* $\gamma(\pi)$. *Fare un disegno approssimativo del cerchio osculatore a* γ *in* $\gamma(\pi)$.

(a) $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2} \not\equiv 1$. Dunque $\gamma(t)$ non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(b) La curva è una spirale, percorsa in senso antiorario:



(c) Per la curvatura di γ in π, usiamo la formula

$$\kappa(\pi) = \frac{\|\gamma'(\pi) \wedge \gamma''(\pi)\|}{\|\gamma'(\pi)\|^3}.$$

N.B.: per calcolare $\gamma'(\pi) \wedge \gamma''(\pi)$, identifichiamo γ con la curva piana di $\mathbf{R}^3$ data da $\begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$. Poiché

$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -\sin t - \sin t - t\cos t \\ \cos t + \cos t - t\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \end{pmatrix}$, ed inoltre

$$\gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \end{pmatrix}, \quad \gamma''(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'(\pi) \wedge \gamma''(\pi)\| = 2 + \pi^2,$$

segue che

$$\kappa(\pi) = \frac{2+\pi^2}{(\sqrt{1+\pi^2})^3}, \quad \rho(\pi) = \frac{1}{\kappa(\pi)} = \frac{(\sqrt{1+\pi^2})^3}{2+\pi^2}.$$

Poiché la curva è percorsa in senso antiorario, la normale punta verso l'interno della curva ed il cerchio osculatore in π è tangente internamente alla curva.

2. *Sia data la curva* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, *con* $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare $\gamma(0)$ *e il piano osculatore a* γ *in* $\gamma(0)$.
   (b) Determinare se la curva γ *è piana.*
   (c) Calcolare la curvatura di γ *in* $\gamma(0)$.

(a) $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il piano osculatore a γ in $\gamma(0)$ è dato da

$$\gamma(0) + \operatorname{span}\{\gamma'(0), \gamma''(0)\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

L'equazione cartesiana del piano risulta: $2x_1 + x_3 = 2$.

(b) Se una curva è piana, allora è contenuta nel piano osculatore in un suo punto qualunque. Nel nostro caso, ogni punto della curva dovrebbe soddisfare l'equazione del piano $2x_1 + x_3 = 2$, ossia

$$2\cos t + t^2 = 2, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Questo è chiaramente falso, per cui la curva non è piana. Un altro modo di verificare che la curva non è piana, è far vedere che la sua torsione non è identicamente nulla (dal punto di vista dei calcoli, è un modo più laborioso).

(c) Poiché la curva non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco (si verifica facilmente che $\|\gamma'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$) calcoliamo la curvatura di γ in $\gamma(0)$ mediante la formula

$$\kappa(0) = \frac{\|\gamma'(0) \wedge \gamma''(0)\|}{\|\gamma'(0)\|^3}.$$

Tutte le quantità necessarie sono già state calcolate al punto (a). Risulta

$$\kappa(0) = \sqrt{5}.$$

3. *Sia* $\gamma(u) = \begin{pmatrix} \sin u + 2 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$, *per* $u \in (-2\pi, 2\pi)$, *e sia* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere una parametrizzazione per la superficie di rotazione $\mathbf{S}$ *ottenuta ruotando* γ *attorno all'asse* x_3 *e determinare i punti regolari di* $\mathbf{S}$.

   (b) Verificare che il punto P *appartiene ad* $\mathbf{S}$ *e determinare le linee coordinate per* P *sulla superficie.*

   (c) Determinare il piano tangente alla superficie in P.

(a) $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} (\sin u + 2)\cos v \\ (\sin u + 2)\sin v \\ u \end{pmatrix}$, per $u \in (-2\pi, 2\pi)$ e $v \in [0, 2\pi]$. Poiché

$$\mathbf{S}_u = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_v = \begin{pmatrix} -(\sin u + 2)\sin v \\ (\sin u + 2)\cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

si vede che tutti i punti della superficie sono regolari: infatti, $\mathbf{S}_u$ ed $\mathbf{S}_v$ sono linearmente indipendenti purché $\mathbf{S}_v$ non sia nullo. $\mathbf{S}_v$ non può essere nullo perché $\sin u + 2 \neq 0$ e $\sin v$ e $\cos v$ non possono annullarsi contemporaneamente.

(b) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}(0,0)$, dunque appartiene alla superficie. le linee coordinate per P sono le curve su $\mathbf{S}$ date da

$$\mathbf{S}(u,0) = \begin{pmatrix} \sin u + 2 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(0,v) = \begin{pmatrix} 2\cos v \\ 2\sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

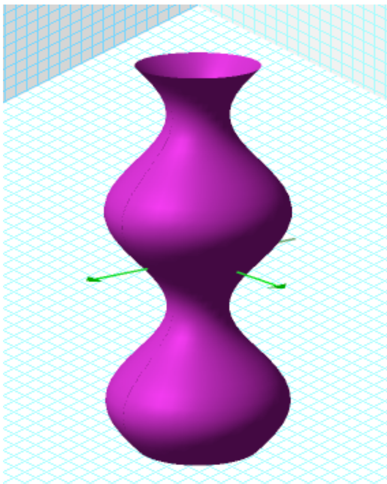
al variare di u, v. Sono rispettivamente il meridiano e il parallelo passanti per P sulla superficie.

(c) Il piano tangente alla superficie in P è dato da

$$P + \mathrm{span}\{\mathbf{S}_u(0,0), \mathbf{S}_v(0,0)\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Ha equazione cartesiana $-x_1 + x_3 = -2$.

4. *Sia* $\mathbf{S}$ *la superficie di rotazione dell'esercizio 4.*
   (a) Determinare la prima forma fondamentale di $\mathbf{S}$.
   (b) Calcolare la curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ *nel punto* $\gamma(\pi/2)$.
   (c) Indicare sulla figura i punti di $\mathbf{S}$ *in cui la curvatura gaussiana è rispettivamente positiva o negativa.*



(a) La prima forma fondamentale di $\mathbf{S}$ è data da

$$E = \|S_u\|^2 = 1 + \cos^2 u, \quad G = \|S_v\|^2 = (\sin u + 2)^2, \quad F \equiv 0.$$

($F \equiv 0$ per ogni superficie di rotazione).

(b) La curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ nel punto $\gamma(\pi/2)$ è data da

$$K = \frac{eg}{EG},$$

dove i coefficienti delle forme quadratiche fondamentali sono calcolati per $u = \pi/2$ e $v = 0$. ($F = f \equiv 0$ per ogni superficie di rotazione). Dai risultati di (a), abbiamo che per $u = \pi/2$ e $v = 0$ vale

$$E(\pi/2, 0) = 1, \quad F(\pi/2, 0) = 0, \quad G(\pi/2, 0) = 9.$$

Inoltre

$$N(\pi/2, 0) = \frac{\mathbf{S}_u(\pi/2,0) \wedge \mathbf{S}_v(\pi/2,0)}{\|\mathbf{S}_u(\pi/2,0) \wedge \mathbf{S}_v(\pi/2,0)\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: conviene valutare le derivate in $(\pi/2, 0)$ *prima di calcolare il versore normale alla superficie in* $\mathbf{S}(\pi/2, 0)$*!!*

Dalle derivate

$$\mathbf{S}_{uu} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{vv} = \begin{pmatrix} -(\sin u + 2)\cos v \\ -(\sin u + 2)\sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

troviamo

$$e(\pi/2, 0) = \mathbf{S}_{uu}(\pi/2, 0) \cdot N(\pi/2, 0) = 1, \qquad g(\pi/2, 0) = \mathbf{S}_{uu}(\pi/2, 0) \cdot N(\pi/2, 0) = 3$$

da cui

$$K(\pi/2, 0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

(c) La curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ è positiva nei punti dove la superficie "ha le gobbe", ossia dove $\sin u > 0$, mentre è negativa nelle rientranze, ossia dove $\sin u < 0$. I punti dove $\sin u = 0$ hanno curvatura nulla.