Analisi 1/3 Ingegneria dei Modelli e Sistemi (Geatti) 1° esonero Roma 29 marzo 2007, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.*
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 6 punti.

---

1. *Siano dati il vettori* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^3$.
   (a) *Determinare la norma* $\|\mathbf{u}\|^2$*, il prodotto scalare* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ *e* $\cos\theta$*, dove* θ *è l'angolo fra* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$*.*
   (b) *Ortonormalizzare la base* $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ *di* $\mathbf{R}^3$*.*
   (c) *Esibire una base ortonormale del complemento ortogonale* $\mathbf{u}^\perp$ *di* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{R}^3$*.*

(a) $\|\mathbf{u}\|^2 = 2, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = -1, \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = -\frac{1}{3}$.

(b) Con G-S troviamo intanto una base ortogonale:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} - \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale è data da

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(c) Per costruzione $\mathbf{u}^\perp = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\}$.

2. *Siano dati il sottospazio* $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ *e il punto* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbf{R}^4$.
   (a) *Determinare il complemento ortogonale* $U^\perp$ *di* U *in* $\mathbf{R}^4$*.*
   (b) *Calcolare la distanza di* P *da* $U^\perp$*.*

(a) Dai coefficienti delle equazioni di U (che sono indipendenti) ricaviamo

$$U^\perp = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

La seconda base di $U^\perp$ è una *base ortogonale* di $U^\perp$, che useremo per rispondere a (b).

(b) La distanza di P da $U^\perp$ è uguale alla distanza $d(P, \pi_{U^\perp}(P))$, dove $\pi_{U^\perp}(P)$ è la proiezione ortogonale di P su $U^\perp$. Chiamiamo $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tale proiezione è data da

$$\pi_{U^\perp}(P) = \frac{P\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} + \frac{P\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e la distanza cercata risulta

$$d(P, \pi_{U^\perp}(P)) = \| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \| = 1.$$

3. *Sia* $\theta = -\frac{\pi}{2}$ *e siano* $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vettori di* $\mathbf{R}^2$.
   (a) *Scrivere le formule della rotazione* $R_{\theta,P} \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *di un angolo* θ *intorno al punto* P.
   (b) *Calcolare le immagini dei punti* P, Z *e* Q *tramite* $R_{\theta,P}$.
   (c) *Calcolare l'immagine della retta* $x_2 = 1$ *tramite* $R_{\theta,P}$.

(a) La rotazione $R_{\theta,P}$ è data dalla composizione $R_{\theta,P} = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P}$, dove R_θ è la rotazione di un angolo $\theta = -\frac{\pi}{2}$ intorno all'origine e T_P è la traslazione di passo P. La formula generale risulta

$$R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T_{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}) = T_{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ -x_1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 2 \\ -x_1 + 4 \end{pmatrix}.$$

(b) $R_{\theta,P}(P) = P$ (infatti P è il centro di rotazione), $R_{\theta,P}(Z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, ed infine $R_{\theta,P}(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) L'immagine della retta $x_2 = 1$, che passa per P e Q, è la retta per $R_{\theta,P}(P) = P$ e $R_{\theta,P}(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Quindi è la retta $x_1 = 3$. Fare anche un disegno per credere...

4. *Sia* $L_A \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, *l'applicazione lineare data da* $X \mapsto AX$, *con* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *ed* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) *Verificare che* L_A *è un'isometria.*
   (b) *Determinare l'insieme dei punti fissi* $F = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid AX = X\}$ *di* L_A.
   (c) *Determinare cosa fa* L_A *su* $F^\perp$ *e dare un'interpretazione geometrica di* L_A.

(a) Direttamente dalla definizione:

$$\|AX - AY\| = \| \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{(x_3 - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} = \|X - Y\|, \quad \forall\, X, Y \in \mathbf{R}^3.$$

Alternativamente: l'applicazione lineare L_A è un'isometria se e solo se conserva la norma, i.e. $\|L_A(X)\| = \|X\|$, per ogni $X \in \mathbf{R}^3$, se e solo se la matrice A è ortogonale.

(b) L'insieme dei punti fissi F è dato da $F = \{X \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_3\} = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Ha dimensione due e coincide con l'autospazio di autovalore 1 della matrice A.

(c) Il sottospazio ortogonale $F^\perp$ è dato da $F^\perp = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Si verifica facilmente che $A \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$. Dunque su $F^\perp$ l'applicazione L_A coincide con meno l'identità ed $F^\perp$ non è altro che l'autospazio di autovalore -1 della matrice A. Geometricamente L_A è la riflessione rispetto al piano F.

5. *Sia data la forma quadratica* $Q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$.

(a) Determinare la forma canonica metrica di Q.

(b) Determinare un cambiamento di coordinate ortogonale $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *che riduca Q in tale forma.*

(a) La matrice simmetrica associata alla forma quadratica Q è data da $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2, e $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica 1 (vedi esercizio precedente...) Dunque la forma canonica metrica di Q risulta $y_1^2 + y_2^2 - y_3^3$.

(b) Per determinare un cambiamento di coordinate ortogonale $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ che riduca Q in tale forma, abbiamo bisogno di una base ortonormale di autovettori di A. Dai risultati dell'esercizio precedente, una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A è data da $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$. Ortonormalizzandola troviamo

$$\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \}$$

ed il cambiamento di coordinate ortogonale cercato è dato dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$