(1) *Sia* $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t^2 \\ te^t \end{pmatrix}$.

(i) Determinare se $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ *appartengono alla traiettoria di* γ.

(ii) Determinare tre punti P, Q, R *sulla traiettoria di* γ.

(iii) Determinare se γ *è una curva regolare.*

(iv) Determinare la retta tangente alla curva in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(v) Determinare in quali punti il piano normale alla curva è parallelo all'asse z.

(i) $A \notin \gamma$: per $t = 1$, si ha $1 \neq 1e^1$; allo stesso modo si trova che $B, C \notin \gamma$.

(ii) $P = \gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 1 \\ e \end{pmatrix}$, $Q = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ \cos \pi^2 \\ \pi e^\pi \end{pmatrix}$.

(iii) La curva è ben definita, C^∞, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Inoltre è regolare in tutti i punti, poiché

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t\sin t \\ e^t + te^t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

(iv) La retta tangente alla curva in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma(0)$ è la retta

$$X = P + t\gamma'(0) : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(v) Al variare di $t \in \mathbf{R}$, il piano normale alla curva in $\gamma(t)$ è una piano parallelo al piano

$$\pi_n : \qquad \gamma'(t) \cdot X = x - (2t\sin t)y + (e^t + te^t)z = 0.$$

È parallelo all'asse z se e solo se $e^t + te^t = 0$, ossia per $t = -1$.

(2) *Sia* $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che γ *è una curva regolare.*

(ii) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva descritto al variare del parametro $t \in [0, \pi]$.

(iii) Determinare se γ *è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.*

(i) La curva è ben definita, C^∞, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Inoltre è regolare in tutti i punti, poiché

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \\ e^t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

(ii)

$$L(\gamma)_{[0,\pi]} = \int_0^\pi \sqrt{(e^t(\cos t - \sin t))^2 + (e^t(\cos t + \sin t))^2 + (e^t)^2}dt = \int_0^\pi \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}(e^\pi - 1).$$

(iii) La curva γ non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco: infatti $\|\gamma'(t)\|^2 \not\equiv 1$.

(3) *Siano γ, $\tilde{\gamma}$ le curve in $\mathbf{R}^3$ definite rispettivamente da*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ e^t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R} \qquad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \log t \\ \sin \log t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}^+.$$

Far vedere che γ e $\tilde{\gamma}$ sono parametrizzazioni equivalenti della stessa curva.

Sia $\phi\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$, $\phi(y) = e^y$. Vale $\phi'(y) \neq 0$, per ogni $y \in \mathbf{R}$. Si ha che γ e $\tilde{\gamma}$ sono parametrizzazioni equivalenti della stessa curva perché

$$\gamma(y) = \begin{pmatrix} y \\ \sin y \\ e^y \end{pmatrix} = \tilde{\gamma} \circ \phi(y) = \tilde{\gamma}(e^y) = \begin{pmatrix} \log e^y \\ \sin \log e^y \\ e^y \end{pmatrix}, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

(4) *Siano γ, $\tilde{\gamma}$ le curve in $\mathbf{R}^2$ definite rispettivamente da*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \ t \in]0, 2\pi] \qquad \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, \ t \in]0, \sqrt{2\pi}].$$

Far vedere che sono due parametrizzazioni equivalenti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Poiché $\cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t^2 + \sin^2 t^2 = 1$, le due curve γ e $\tilde{\gamma}$ giacciono sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Al variare di $t \in]0, 2\pi]$, tutti i punti della circonferenza sono raggiunti una e una sola volta da γ; similmente, al variare di $t \in]0, \sqrt{2\pi}]$ tutti i punti della circonferenza sono raggiunti una e una sola volta da $\tilde{\gamma}$. La funzione $\phi(t) = t^2$ è una funzione bigettiva da $]0, \sqrt{2\pi}]$ a $]0, 2\pi]$, con derivata $\phi'(t) = 2t > 0$ e soddisfa $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\phi(t))$. Dunque γ e $\tilde{\gamma}$ sono due parametrizzazioni equivalenti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

(5) *Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la curva definita da*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che il supporto della curva è contenuto nell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.
(ii) Calcolare la curvatura di γ al variare di t.
(iii) Determinare il cerchio osculatore a γ nei punti di curvatura massima.

(i) Poiché $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, la traiettoria della curva è contenuta nell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Precisamente nel ramo di iperbole i cui punti soddisfano $x > 0$.
(ii) Calcolando $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$, troviamo che $0 < \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} \not\equiv 1$. Pertanto γ è una curva regolare, ma non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Per calcolare la curvatura di γ, scriviamo

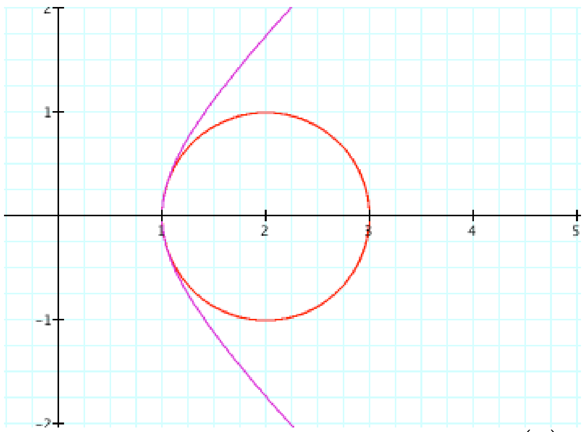
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma''(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ 0 \end{pmatrix}$$

e usiamo la formula

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{1}{(\sqrt{1+\sinh^2 t})^3}.$$

(iii) La curvatura è massima nel punto $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e vale $\kappa(0) = 1$. Il cerchio osculatore in quel punto è un cerchio di raggio $R = \rho(0) = 1$ e centro $C(0) = \gamma(0) + \rho(0)\mathbf{n}(0)$, dove $\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(t) \wedge \mathbf{t}(t)$ è il versore normale alla curva in $\gamma(0)$. Dai calcoli troviamo

$$\mathbf{b}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Il cerchio osculatore all'iperbole nel punto $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(6) (Arco di cicloide) *Sia* $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ *la curva definita da*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare il punto della traiettoria di γ *dove la curvatura è minima.*
(ii) Determinare il cerchio osculatore in quel punto.

(i) Calcolando $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2(1-\cos t)}$, vediamo che

$$\|\gamma'(t)\| > 0, \; t \neq 0, 2\pi, \qquad \|\gamma'(t)\| \not\equiv 1$$

per cui la curva è regolare fuori dagli estremi, ma non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Anche in questo caso calcoliamo la curvatura con la formula

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Scrivendo

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

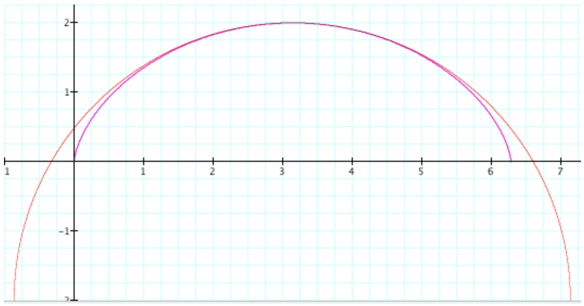
troviamo

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t - 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2(1-\cos t)^3}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3\sqrt{1-\cos t}}, \qquad t \neq 0, 2\pi.$$

La curvatura è minima nel punto $\gamma(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}$ e vale $\kappa(\pi) = \frac{1}{4}$.

(ii) Il cerchio osculatore è un cerchio di raggio $R = \rho(\pi) = 4$ e centro $C(\pi) = \gamma(\pi) + \rho(\pi)\mathbf{n}(\pi)$. Con calcoli analoghi a quelli dell'esercizio precedente, si trova

$$C(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Il cerchio osculatore all'arco di cicloide nel punto $\gamma(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}$.

(7) *Sia* $\gamma \colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ t \end{pmatrix}$.

(i) Determinare se γ *è una curva piana.*

(ii) Calcolare la curvatura di γ *al variare di* $t \neq 0$.

(i) Se la curva è piana, è interamente contenuta nel piano osculatore in un suo punto qualunque. Scegliamo ad esempio il punto $P = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il piano osculatore a γ in $\gamma(0)$ è il piano passante per $\gamma(0)$, parallelo al piano generato da $\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\gamma''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (che sono linearmente indipendenti). La sua equazione risulta

$$x = 0.$$

È chiaro che non tutti i punti di γ appartengono a questo piano e dunque γ non è piana.

(ii) Da $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ calcoliamo la curvatura di γ

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{1 + (\cos t - 1)^2}}{(\sqrt{3 - 2\cos t})^3}.$$

(8) *Sia* $\gamma \colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *la curva definita da* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ (1+t)/t \\ (1-t^2)/t \end{pmatrix}$. *Verificare che* γ *è una curva piana.*

Facciamo vedere che la curva è interamente contenuta nel piano osculatore in un suo punto qualunque. Scegliamo ad esempio il punto $P = \gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il piano osculatore a γ in $\gamma(1)$ è il piano passante per $\gamma(1)$, parallelo al piano generato da $\gamma'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\gamma''(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (che sono linearmente indipendenti). La sua equazione risulta

$$x - y + z = -1$$

ed è soddisfatta da tutti i punti di γ. Dunque γ è una curva piana.

Osservazione: I vettori $\gamma'(0)$ e $\gamma''(0)$ non sono ortogonali fra loro e formano una base non ortogonale di $span\{\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0)\}$.

(9) *Sia* $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *una curva polinomiale di grado due*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \\ a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che γ *è una curva piana, ossia è contenuta in un piano di* $\mathbf{R}^3$.

(ii) Determinare il piano che contiene la curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 + t^2 \\ t - t^2 \\ 1 - t - 2t^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Scriviamo

$$\gamma(t) = A + tB + t^2 C, \qquad \text{per} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che se B e C sono linearmente dipendenti, la curva è una retta ed è contenuta in infiniti piani. Assumiamo perciò B e C linearmente indipendenti. Dal calcolo di $\gamma'(t) = B + 2tC$ e $\gamma''(t) = 2C$, troviamo

$$\mathbf{t}(t) = \frac{B + 2tC}{\|B + 2tC\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{B \wedge 2C}{\|B \wedge 2C\|}.$$

In particolare, vediamo che tutti i piani osculatori di γ sono paralleli, con vettore normale $\mathbf{b}(t) = \frac{B \wedge 2C}{\|B \wedge 2C\|}$, per ogni $t \in \mathbf{R}$. Facciamo vedere che tutti i punti di γ soddisfano ad esempio l'equazione del piano osculatore a γ nel punto $\gamma(0) = A$, piano che ha equazione

$$\mathrm{b}(0) \cdot X = \mathrm{b}(0) \cdot \gamma(0), \quad \text{ossia} \quad B \wedge 2C \cdot X = B \wedge 2C \cdot A.$$

Sostituendo le coordinate di un punto generico di γ nell'equazione, troviamo infatti un'identità:

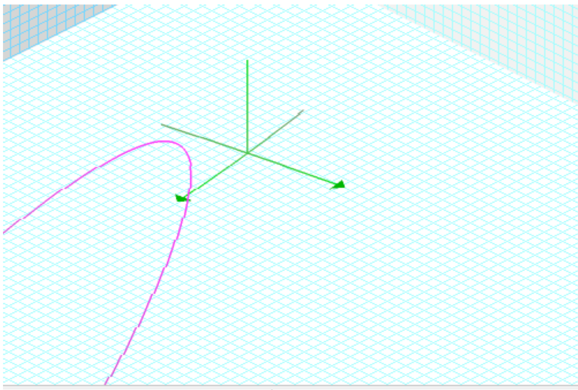
$$B \wedge 2C \cdot (A + tB + t^2 C) = B \wedge 2C \cdot A + B \wedge 2C \cdot (tB + t^2 C) = B \wedge 2C \cdot A, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Alternativamente: si può fare vedere direttamente che per ogni curva polinomiale di grado due, esistono $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ tali che

$$\alpha(a_1 + tb_1 + t^2 c_1) + \beta(a_2 + tb_2 + t^2 c_2) + \gamma(a_3 + tb_3 + t^2 c_3) = \delta$$

sia soddisfatta per ogni $t \in \mathbf{R}$.
(ii) Con i calcoli del punto precedente (calcolando ad esempio il piano osculatore alla curva nel punto $\gamma(0)$), troviamo che la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ t-t^2 \\ 1-t-2t^2 \end{pmatrix}$ è contenuta nel piano

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 7.$$



La curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ t-t^2 \\ 1-t-2t^2 \end{pmatrix}$ è una curva piana in $\mathbf{R}^3$.

(10) *Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Verificare che γ non è piana, ossia non è contenuta in nessun piano di $\mathbf{R}^3$.*

Si può fare vedere direttamente che non esistono $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ tali che

$$\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 = \delta$$

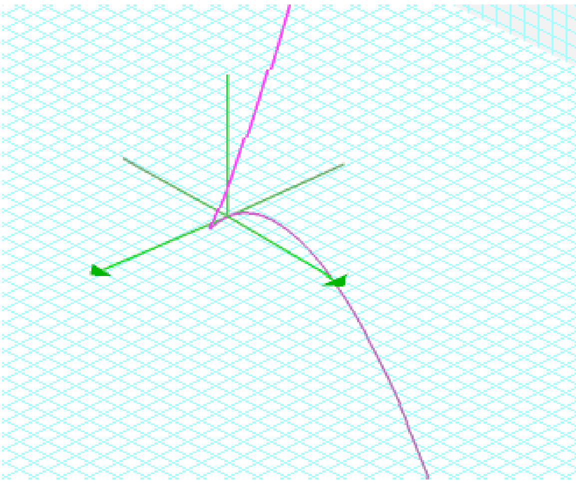
sia soddisfatta per ogni $t \in \mathbf{R}$.
Alternativamente: Facciamo vedere che la torsione della curva non è identicamente nulla. Scriviamo

$$\gamma(t) = A + tB + t^2C + t^3D, \qquad \text{per} \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo di $\gamma'(t) = B + 2tC + 3t^2D$, $\gamma''(t) = 2C + 6tD$, $\gamma'''(t) = 6D$, ricaviamo la torsione

$$\tau(t) = \frac{\det|\gamma'(t)\ \gamma''(t)\ \gamma'''(t)|}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{-12t+12}{(36t^4+36t^2+4)} \not\equiv 0.$$

Si può anche verificare che il piano osculatore in $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il piano orizzontale $z = 0$, mentre il piano osculatore in $\gamma(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha equazione $3x - 3y + z = 1$.



La cubica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$ non è una curva piana.

(11) Sanini, Esercizi Cap. VI, N. 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7.

(12) *Verificare che lunghezza d'arco, curvatura e torsione di una curva parametrizzata (purché definiti) sono invarianti rispetto alle trasformazioni rigide.*

Sia $\gamma(t)$ una curva in $\mathbf{R}^3$ e sia $L(t) = M\gamma(t) + B$ la sua immagine tramite una trasformazione rigida dello spazio data da $X \mapsto MX + B$, con $B \in \mathbf{R}^3$ e M una matrice 3×3 ortogonale. Abbiamo $L'(t) = M\gamma'(t)$, $L''(t) = M\gamma''(t)$ ed $L'''(t) = M\gamma'''(t)$. Poiché M è ortogonale, conserva le norme

$$\|L'(t)\| = \|M\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t)\|,$$

e la lunghezza d'arco è conservata. Poiché

$$\|M\mathbf{x} \wedge M\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3,$$

anche curvatura e torsione sono conservate.

(13) *Siano P, Q, R, S quattro punti distinti in $\mathbf{R}^3$.*

(i) Dimostrare che esiste un'unica una curva polinomiale di grado tre $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 \\ a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 \\ a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3 \end{pmatrix}$$

che passa per P, Q, R, S, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = t_1, t_2, t_3, t_4$.

(ii) Determinare la cubica passante per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = -1, 0, 1, 2$.

(i) Siano $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \dots, S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$. Si tratta di risolvere il sistema lineare di 12 equazioni nelle 12 incognite $\{a_1, a_2, a_3, \dots, d_1, d_2, d_3\}$ (i coefficienti della curva)

$$\begin{cases} a_1 + b_1 t_1 + c_1 t_1^2 + d_1 t_1^3 = p_1 \\ a_2 + b_2 t_1 + c_2 t_1^2 + d_2 t_1^3 = p_2 \\ a_3 + b_3 t_1 + c_3 t_1^2 + d_3 t_1^3 = p_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_1 + b_1 t_4 + c_1 t_4^2 + d_1 t_4^3 = s_1 \\ a_2 + b_2 t_4 + c_2 t_4^2 + d_2 t_4^3 = s_2 \\ a_3 + b_3 t_4 + c_3 t_4^2 + d_3 t_4^3 = s_3. \end{cases}$$

Il fatto che i punti siano distinti implica che i valori del parametro $t = t_1, t_2, t_3, t_4$ siano distinti e garantisce che il determinate della matrice associata sia diverso da zero (Vandermonde). Di conseguenza esiste un'unica soluzione del sistema.
(ii) Risolvendo il sistema.....si trova la cubica

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 5/6 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 5/6 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5/6 \end{pmatrix}.$$

(14) *Siano P, Q due punti distinti in $\mathbf{R}^3$ e siano U, V due vettori in $\mathbf{R}^3$.*
(i) Dimostrare che esiste un'unica una curva polinomiale di grado tre $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ che passa per P e Q con vettori tangenti rispettivamente uguali a U e V, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = t_1, t_2$.
(ii) Determinare la cubica passante per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = 0, 1$ e con tangente uguale a $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Siano $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \dots, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Si tratta di risolvere il sistema lineare di 12 equazioni nelle 12 incognite $\{a_1, a_2, a_3, \dots, d_1, d_2, d_3\}$ (i coefficienti della curva)

$$\begin{cases} a_1 + b_1 t_1 + c_1 t_1^2 + d_1 t_1^3 = p_1 \\ a_2 + b_2 t_1 + c_2 t_1^2 + d_2 t_1^3 = p_2 \\ a_3 + b_3 t_1 + c_3 t_1^2 + d_3 t_1^3 = p_3 \\ b_1 + 2c_1 t_1 + 3d_1 t_1^2 = u_1 \\ b_2 + 2c_2 t_1 + 3d_2 t_1^2 = u_2 \\ b_3 + 2c_3 t_1 + 3d_3 t_1^2 = u_3 \\ a_1 + b_1 t_2 + c_1 t_2^2 + d_1 t_2^3 = q_1 \\ a_2 + b_2 t_2 + c_2 t_2^2 + d_2 t_2^3 = q_2 \\ a_3 + b_3 t_2 + c_3 t_2^2 + d_3 t_2^3 = q_3 \\ b_1 + 2c_1 t_2 + 3d_1 t_2^2 = v_1 \\ b_2 + 2c_2 t_2 + 3d_2 t_2^2 = v_2 \\ b_3 + 2c_3 t_2 + 3d_3 t_2^2 = v_3. \end{cases}$$

Il fatto che i punti siano distinti implica che i valori del parametro $t = t_1, t_2, t_3, t_4$ siano distinti e garantisce che il determinate della matrice associata sia diverso da zero. Di conseguenza esiste un'unica soluzione del sistema.

(ii) Risolvendo il sistema.....si trova la cubica

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$