(1) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Sol. (i) Si ha

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 + 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Applicando la formula trovata in (i), troviamo

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \qquad T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha

$$T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} ; \qquad T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(iv) Si ha

$$(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T_{\mathbf{q}+3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} ; \qquad (T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = T_{3\mathbf{p}-\mathbf{q}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

(2) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A.

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $\quad X \mapsto AX$.

Sol. (i) Dobbiamo mostrare che $A^T A = \mathrm{Id}_3$, dove A^T indica la trasposta di A e Id_3 è la matrice identità 3×3, ovvero che

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La verifica di questo fatto è immediata.

(ii) Si ha $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_3) = -(\lambda^3 - \frac{5}{3}\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + 1)$. Questo polinomio ha una sola radice reale: $\lambda = 1$, che è pertanto l'unico autovalore reale della matrice A. Si noti come $\lambda = 1$ dovesse necessariamente essere un autovalore di A in quanto A è una matrice ortogonale con determinante uguale ad 1. L'1-autospazio di A è una retta in quanto la dimensione di ogni autospazio è almeno 1 e non può superare la molteplicità geometrica dell'autovalore corrispondente. Per determinare la direzione di questa retta risolviamo l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione di questo sistema è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Poichè A è una matrice ortogonale con determinante positivo, essa rappresenta geometricamente la rotazione attorno ad un asse. L'asse di rotazione di F è stato determinato nel punto (ii): si tratta della retta r generata dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per determinare l'angolo di rotazione basta determinare gli autovalori complessi di A. Risolvendo l'equazione $\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + 1 = 0$ troviamo $\lambda_{1/2} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-1}$, pertanto l'angolo θ di rotazione è l'angolo individuato da

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{3} \\ \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

L'ambiguità nel segno di θ dipende dal fatto che non c'è un orientamento preferenziale sul piano $r^\perp$ che ci permetta di dire "questa rotazione è positiva, quest'altra è negativa". Tutto dipende da che parte si guarda il piano $r^\perp$: un orientamento su $r^\perp$ è infatti indotto dalla scelta di un orientamento su r, è questa scelta è arbitraria. Si noti però come, una volta fatta questa scelta l'orientamento positivo su $r^\perp$ è univocamente determinato e l'ambiguità nel segno di θ scompare.

(3) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.
(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A.
(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad X \mapsto AX$.

Sol. (i) E' del tutto analogo all'esercizio precedente.
(ii) Si ha $\det(A - \lambda \mathrm{Id}_3) = -(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$. La matrice A ha pertanto due autovalori: l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore -1 con molteplicità algebrica 1. Per determinare l'1-autospazio di A risolviamo l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ovvero

$$\begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La cui soluzione è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}.$$

L'1-autospazio è pertanto un piano, che indicheremo con π. Il (-1)-autospazio è necessariamente la retta $\pi^\perp$, che è generata dal vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iv) L'isometria F è la simmetria rispetto al piano π.

(4) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?
(ii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione R_{π} intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?
(iii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?
(iv) Quali sono i vertici di C dopo la dilatazione $D_{1,3,2}$?
(v) Quali sono i vertici di C dopo l'omotetia D_3?
(vi) Quali sono i vertici di C dopo lo shear $N_{1,0.3}$?

Sol. (i) Ricordiamo che la rotazione di angolo φ attorno al vettore $\mathbf{e}_3$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0\\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dunque la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{e}_3$ è data da

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\\x_3\end{pmatrix}$$

ed è immediato scrivere quali sono i vertici del cubo C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
(ii) In modo analogo si trova che la rotazione di angolo π attorno al vettore $\mathbf{e}_3$ è

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

ed è immediato scrivere quali sono i vertici del cubo C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
(iii) La rotazione di angolo $3\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{e}_3$ è

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\x_3\end{pmatrix}$$

ed è immediato scrivere quali sono i vertici del cubo C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(5) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_3$.

(ii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_1$.
(iii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $-\mathbf{e}_1$.
(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?
(v) Disegnare l'immagine di C dopo la dilatazione $D_{1,3,2}$?
(vi) Disegnare l'immagine di C dopo l'omotetia D_3?
(vii) Disegnare l'immagine di C dopo lo shear $N_{1,0.3}$?

Sol. (i) La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{e}_3$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dunque il cubo C viene mandato in se stesso da questa rotazione.
(ii) La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{e}_1$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

dunque il cubo C viene mandato in se stesso da questa rotazione.
(iii) La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $-\mathbf{e}_1$ coincide con la rotazione di angolo $-\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{e}_1$è data pertanto da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Il cubo C viene mandato in se stesso da questa rotazione.
(iv) Si vede facilmente che, se R è una rotazione che manda C in se stesso, allora l'asse di R è di uno dei seguenti tre tipi: *i)* è l'asse che unisce i centri di due facce opposte (in questo caso questi assi coincidono con gli assi coordinati); *ii)* è l'asse che unisce i centri di due lati opposti; *iii)* è l'asse che unisce i due vertici opposti di C. Indichiamo questi assi con le lettere a, b e c rispettivamente. Rimangono da determinare gli angoli delle rotazioni attorno a questi assi. Per quanto riguarda le rotazioni attorno agli assi di tipo a si vede facilmente che gli angoli devono essere della forma $k\pi/2$, con $k \in \mathbf{Z}$. La rotazione attorno ad un asse di tipo b deve mandare i lati che quest'asse interseca in se stessi. Deve pertanto essere una rotazione di angolo $k\pi$, con $\pi \in \mathbf{Z}$. Restano da studiare le rotazioni attorno agli assi di tipo c. Si vede facilmente che i tre lati di C che partono da un vertice sono simmetrici rispetto all'asse di tipo c per quel vertice. La rotazione attorno a quell'asse deve permutare tra loro questi tre lati. Deve pertanto essere una rotazione di angolo $2k\pi/3$, con $k \in \mathbf{Z}$.

(6) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di un angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.
(ii) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ intorno a $\mathbf{v}$.
(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a l.
(iv) Sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a π.

Sol. (i) Una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ avente $\mathbf{v}$ come primo vettore ed orientata concordemente con la base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normalizzandola troviamao la base ortonormale

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

La matrice che rappresenta la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la rotazione di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{v}$ nella base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(ii) La matrice che rappresenta la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno al vettore $\mathbf{v}$ nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Pertanto, la matrice che rappresenta la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno al vettore $\mathbf{v}$ nella base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} -1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & -1\sqrt{6} \\ -1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & -1\sqrt{6} \\ -1\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1\sqrt{3} & 1\sqrt{2} & -1\sqrt{6} \\ -1\sqrt{3} & -1\sqrt{2} & -1\sqrt{6} \\ -1\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 + \sqrt{2}/3 & 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 & 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 \\ 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 & 1/3 + \sqrt{2}/3 & 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 \\ 1/3 - \sqrt{2}/6 - \sqrt{6}/6 & 1/3 - \sqrt{2}/6 + \sqrt{6}/6 & 1/3 + \sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

(iii) L'equazione parametrica cercata è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 - \sqrt{3}/3 \\ 4/3 + \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

Alternativamente, dati 2 punti distinti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ su l, la retta cercata è la retta per i punti $R_{\pi/2,\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ e $R_{\pi/2,\mathbf{v}}(\mathbf{q})$.
(iv) L'equazione cartesiana di π si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7$$

Poiché $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ è un'isometria abbiamo

$$(R_{-\pi/4,\mathbf{v}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})\cdot(R_{-\pi/4,\mathbf{v}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix})=7,$$

per ogni vettore $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ di π. Il vettore a destra in questo prodotto scalare è il generico elemento del piano $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}\pi$; questo significa che il piano $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}\pi$ ha equazione cartesiana

$$(R_{-\pi/4,\mathbf{v}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=7$$

Si ha

$$\begin{pmatrix}1/3+\sqrt{2}/3 & 1/3-\sqrt{2}/6+\sqrt{6}/6 & 1/3-\sqrt{2}/6-\sqrt{6}/6\\ 1/3-\sqrt{2}/6-\sqrt{6}/6 & 1/3+\sqrt{2}/3 & 1/3-\sqrt{2}/6+\sqrt{6}/6\\ 1/3-\sqrt{2}/6+\sqrt{6}/6 & 1/3-\sqrt{2}/6-\sqrt{6}/6 & 1/3+\sqrt{2}/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3+\sqrt{2}/6-\sqrt{6}/6\\2/3+\sqrt{2}/6+\sqrt{6}/6\\2/3-\sqrt{2}/3\end{pmatrix}$$

Dunque il piano $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}\pi$ ha un'equazione cartesiana della forma

$$(2/3+\sqrt{2}/6-\sqrt{6}/6)x_1+(2/3+\sqrt{2}/6+\sqrt{6}/6)x_2+(2/3-\sqrt{2}/3)x_3=7.$$

Alternativamente, dati 3 punti distinti $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ su π, il piano cercato è il piano per i 3 punti $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}(\mathbf{p})$, $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ e $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}(\mathbf{r})$.

(7) Sia π il piano di equazione $x_1+2x_2=0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π.

(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

Sol. (i) La direzione ortogonale a π è generata dal vettore $\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ di norma 1; una base ortonormale di π è data dai due vettori $\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\-1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Indichiamo con $\mathcal{B}$ la base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ data dai tre vettori

$$\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\-1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}.$$

La matrice che rappresenta la simmetria S_π rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice che rappresenta S_π rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$S_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 - 3x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(ii) Mediante la formula trovata nel punto (i), si calcola facilmente che le immagini dei punti dati sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -7/5 \\ 1/5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) L'equazione parametrica cercata è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(8) Sia C il cubo dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto
   (i) al piano (x_1, x_2).
   (ii) al piano (x_2, x_3).
   (iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

Sol. (i) La simmetria rispetto al piano (x_1, x_2) è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

L'immagine di C si calcola immediatamente mediante questa formula.
(ii) La simmetria rispetto al piano (x_2, x_3) è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(iii) La simmetria rispetto al piano di equazione $x_1 = x_2$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il cubo C viene mandato in se stesso da questa simmetria.

(9) Sia C il cubo dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto
   (i) al piano (x_1, x_2).
   (ii) al piano (x_2, x_3).
   (iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

(iv) Trovare tutte le riflessioni S_π che mandano C in se stesso.

Sol. (i) Coincide con C.
(ii) Coincide con C.
(iii) Coincide con C.
(iv) Si tratta delle riflessioni rispetto ai piani ortogonali agli assi di rotazione descritti nella soluzione dell'esercizio (5.iv).

(10) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare la formula per la riflessione $U_\mathbf{p}$ rispetto al punto $\mathbf{p}$.
(ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_\mathbf{q}$ rispetto al punto $\mathbf{q}$.
(iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ e per $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$.
(iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ e $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$?

Sol. (i) Si ha $U_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} - (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{p}$. In coordinate,

$$U_\mathbf{p} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 + 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Analogamente $U_\mathbf{q}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} + 2\mathbf{q}$. In coordinate,

$$U_\mathbf{q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 - 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha

$$(U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q})(\mathbf{x}) = U_\mathbf{p}\left(U_\mathbf{q}(\mathbf{x})\right) = U_\mathbf{p} \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 - 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p})(\mathbf{x}) = U_\mathbf{q}\left(U_\mathbf{p}(\mathbf{x})\right) = U_\mathbf{q} \begin{pmatrix} -x_1 + 2 \\ -x_2 + 2 \\ -x_3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(iv) Si ha $(U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q})(\mathbf{x}) = U_\mathbf{p}\left(-\mathbf{x} + 2\mathbf{q}\right) = -\left(-\mathbf{x} + 2\mathbf{q}\right) + 2\mathbf{p} = \mathbf{x} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = T_{2(\mathbf{p}-\mathbf{q})}(\mathbf{x})$ ovvero $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ è la traslazione di vettore $2(\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Scambiando il ruolo di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ si vede che $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$ è la traslazione di vettore $2(\mathbf{q} - \mathbf{p})$.

(11) Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia π' il piano di equazione $x_3 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S_π rispetto a π.
(ii) Calcolare le formule della riflessione $S_{\pi'}$ rispetto a π'.
(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

Sol. (i) Il piano π ha equazione cartesiana $-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, ed un vettore ortogonale a π è dato da $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un generico vettore di $\mathbf{R}^3$. La retta per P e perpendicolare a π è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Essa interseca π nel punto

$$Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_0 = (3a - 2b - c)/14.$$

Il simmetrico di P rispetto al piano π è il punto che si ottiene in corrispondenza del valore del parametro $2t_0 = (3a - 2b - c)/7$, cioè

$$S_\pi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + (3a - 2b - c)/7 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2a + 6b + 3c \\ 6a + 3a - 2c \\ 3a - 2b + 6c \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice che rappresenta S_π rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è data da

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{pmatrix}.$$

(ii) La riflessione rispetto a π' è rappresentata, nella base canonica di $\mathbf{R}^3$ dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$S_{\pi'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

(iii) La trasformazione composta $S_\pi \circ S_{\pi'}$ è rappresentata (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & -3/7 \\ 6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 3/7 & -2/7 & -6/7 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$(S_\pi \circ S_{\pi'}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

(iv) La trasformazione composta $S_{\pi'} \circ S_\pi$ è rappresentata (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ -3/7 & 2/7 & -6/7 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$(S_{\pi'} \circ S_\pi)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

(12) Sia $D_{2,5,3}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{\lambda,\mu,\rho} \circ D_{2,5,3}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda,\mu,\rho}$ sia l'applicazione identica.

Sol. Osserviamo innanzitutto che le dilatazioni commutano fra loro: date due dilatazioni $D_{\lambda,\mu,\nu}$ e $D_{\rho,\sigma,\tau}$, si ha

$$D_{\lambda,\mu,\nu} \circ D_{\rho,\sigma,\tau} = D_{\rho,\sigma,\tau} \circ D_{\lambda,\mu,\nu} = D_{\rho\lambda,\sigma\mu,\tau\nu}.$$

(i)(ii) La dilatazione $D_{1/2,1/5,1/3}$, che è l'inversa di $D_{2,5,3}$, soddisfa $D_{1/2,1/5,1/3} \circ D_{2,5,3} = D_{2,5,3} \circ D_{1/2,1/5,1/3} = Id$.

(13) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se $\lambda = \mu = \rho$.

Sol. Se $\lambda = \mu = \nu$, la dilatazione $D_{\lambda,\lambda,\lambda}$ conserva gli angoli fra i vettori e quindi le direzioni delle rette e dei piani:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{\lambda\mathbf{v} \cdot \lambda\mathbf{w}}{\|\lambda\mathbf{v}\|\|\lambda\mathbf{w}\|}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3. \tag{$*$}$$

D'altra parte, se ad esempio $\lambda \neq \mu$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu,\nu}$ non conserva gli angoli fra i vettori e quindi ne anche le direzioni delle rette o dei piani: basta provare per esempio con $\lambda = 4$, $\mu = \nu = 1$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(14) Determinare l'inversa della trasformazione (shear) $N_{1,1,1}$.

Sol. L'inversa $N_{1,1,1}^{-1}$ è data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pertanto

$$N_{1,1,1}^{-1}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x - 3 \end{pmatrix}.$$