

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali*.

NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7,5 punti.

1. Siano dati il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ e il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.

- (a) Determinare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$.
 (b) Calcolare le proiezioni ortogonali di P su $W^\perp$ e su W .
 (c) Calcolare le distanze di P da $W^\perp$ e da W .

- (a) Una base del complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$ è data dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ed è una base ortogonale.

- (b) Si vede subito che $P \in W^\perp$, per cui

$$\pi_{W^\perp}(P) = P, \quad \pi_W(P) = O.$$

- (c) Dal punto (b) segue immediatamente che $d(P, W^\perp) = 0$ e $d(P, W) = \|P\| = 2$.

2. Sia $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Verificare che F è un'isometria (spiegare bene la risposta).
 (b) Determinare i punti fissi di F .
 (c) Dare un'interpretazione geometrica di F (spiegare bene la risposta).

- (a) Per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$, vale

$$\|F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + 3 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Dunque F è un'isometria.

- (b) I punti fissi di F sono le soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Risulta che F ha un unico punto fisso dato da $P = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

- (c) F non può essere che la rotazione in senso antiorario di un angolo $\theta = 3\pi/2$ intorno al punto P :

$$F = T_P \circ R_\theta \circ T_{-P}, \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provare...

3. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbf{R}$.

(a) Determinare $\gamma(0)$ e il piano osculatore a γ in $\gamma(0)$.

(b) Determinare se la curva γ è piana.

(c) Calcolare la curvatura di γ in $\gamma(0)$.

(a) $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il piano osculatore a γ in $\gamma(0)$ è dato da

$$\gamma(0) + \text{span}\{\gamma'(0), \gamma''(0)\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

L'equazione cartesiana del piano risulta: $2x_1 + x_3 = 2$.

(b) Se una curva è piana, allora è contenuta nel piano osculatore in un suo punto qualunque. Nel nostro caso, ogni punto della curva dovrebbe soddisfare l'equazione del piano $2x_1 + x_3 = 2$, ossia

$$2 \cos t + t^2 = 2, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Questo è chiaramente falso, per cui la curva non è piana. Un altro modo di verificare che la curva non è piana, è far vedere che la sua torsione non è identicamente nulla (dal punto di vista dei calcoli, è un modo più laborioso).

(c) Poiché la curva non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco (si verifica facilmente che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$) calcoliamo la curvatura di γ in $\gamma(0)$ mediante la formula

$$\kappa(0) = \frac{\|\gamma'(0) \wedge \gamma''(0)\|}{\|\gamma'(0)\|^3}.$$

Tutte le quantità necessarie sono già state calcolate al punto (a). Risulta

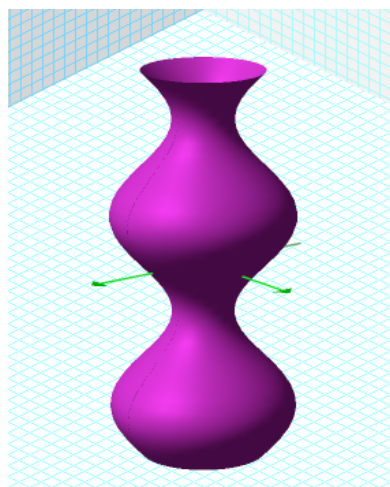
$$\kappa(0) = \sqrt{5}.$$

4. Sia $\gamma(u) = \begin{pmatrix} \sin u + 2 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$, per $u \in (-2\pi, 2\pi)$, e sia $\mathbf{S}$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 .

(a) Determinare la prima forma fondamentale di $\mathbf{S}$.

(b) Calcolare la curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ nel punto $\gamma(\pi/2)$.

(c) Indicare sulla figura i punti di $\mathbf{S}$ in cui la curvatura gaussiana è rispettivamente positiva o negativa.



(a) La prima forma fondamentale di $\mathbf{S}$ è data da

$$E = \|S_u\|^2 = 1 + \cos^2 u, \quad G = \|S_v\|^2 = (\sin u + 2)^2, \quad F \equiv 0.$$

($F \equiv 0$ per ogni superficie di rotazione).

(b) La curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ nel punto $\gamma(\pi/2)$ è data da

$$K = \frac{eg}{EG},$$

dove i coefficienti delle forme quadratiche fondamentali sono calcolati per $u = \pi/2$ e $v = 0$. ($F = f \equiv 0$ per ogni superficie di rotazione). Dai risultati di (a), abbiamo che per $u = \pi/2$ e $v = 0$ vale

$$E(\pi/2, 0) = 1, \quad F(\pi/2, 0) = 0, \quad G(\pi/2, 0) = 9.$$

Inoltre

$$N(\pi/2, 0) = \frac{\mathbf{S}_u(\pi/2, 0) \wedge \mathbf{S}_v(\pi/2, 0)}{\|\mathbf{S}_u(\pi/2, 0) \wedge \mathbf{S}_v(\pi/2, 0)\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

N.B.: conviene valutare le derivate in $(\pi/2, 0)$ prima di calcolare il versore normale alla superficie in $\mathbf{S}(\pi/2, 0)$!!

Dalle derivate

$$\mathbf{S}_{uu} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{vv} = \begin{pmatrix} -(\sin u + 2) \cos v \\ -(\sin u + 2) \sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

troviamo

$$e(\pi/2, 0) = \mathbf{S}_{uu}(\pi/2, 0) \cdot N(\pi/2, 0) = 1, \quad g(\pi/2, 0) = \mathbf{S}_{vv}(\pi/2, 0) \cdot N(\pi/2, 0) = 3$$

da cui

$$K(\pi/2, 0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

(c) La curvatura gaussiana di $\mathbf{S}$ è positiva nei punti dove la superficie "ha le gobbe", ossia dove $\sin u > 0$, mentre è negativa nelle rientranze, ossia dove $\sin u < 0$. I punti dove $\sin u = 0$ hanno curvatura nulla.