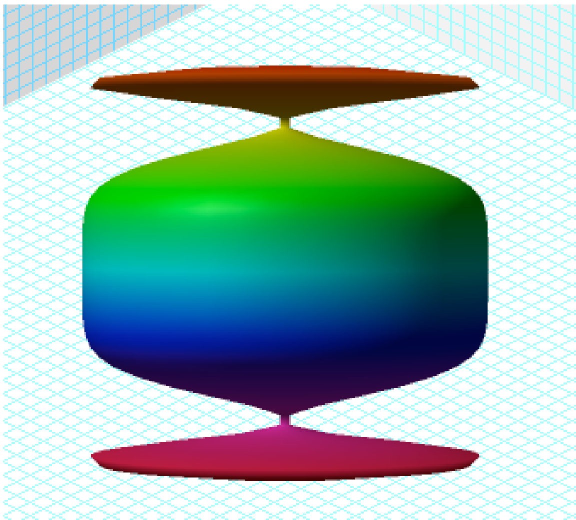
**2. Superfici di rotazione.**

Sia $\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, una curva semplice e regolare sul piano $(x, z)$. Ruotando $\gamma$ attorno all'asse $z$ si ottiene una superficie in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

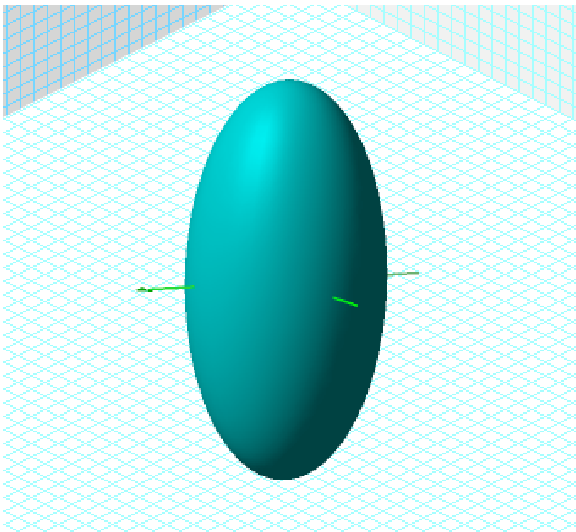
$$S(t,\theta) = \begin{pmatrix} f(t)\cos\theta \\ f(t)\sin\theta \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad t \in \mathbb{R}.$$



La superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t^3 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ attorno all'asse $z$.

Fra le superfici di rotazione ci sono:

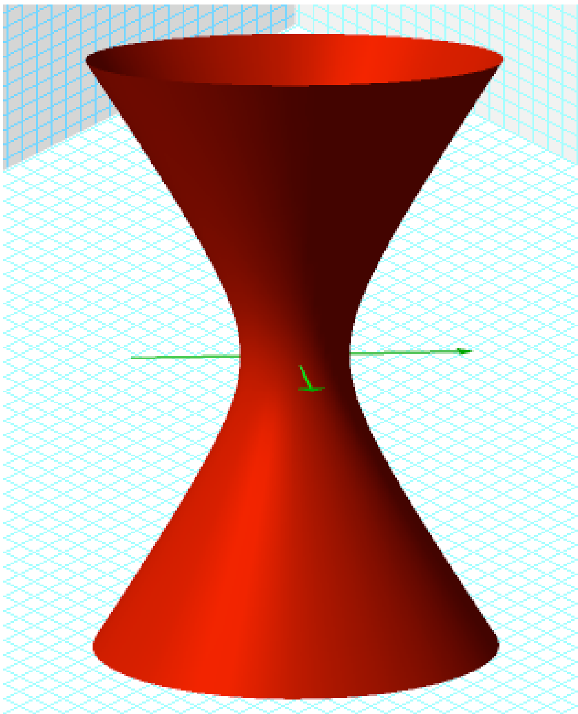
l'*ellissoide* di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, ottenuto ruotando attorno all'asse $z$ la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ 0 \\ b\sin t \end{pmatrix}$, per $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $a,\ b > 0$.



L'ellissoide ottenuto ruotando la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 0 \\ 4\sin t \end{pmatrix}$, attorno all'asse $z$.

l'*iperboloide a una falda* di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, ottenuto ruotando attorno all'asse $z$ la curva

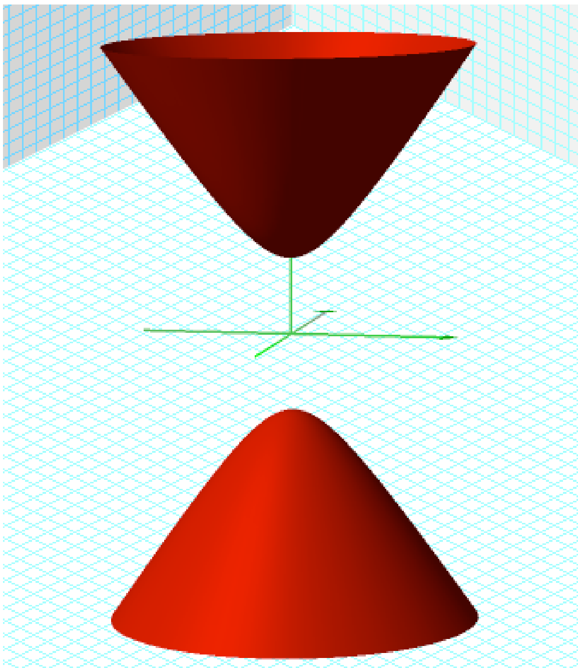
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cosh t \\ 0 \\ b \sinh t \end{pmatrix}, \ t \in [-\pi/2, \pi/2], \quad a, \ b > 0.$$



L'iperboloide ottenuto ruotando la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cosh t \\ 0 \\ 4 \sinh t \end{pmatrix}$, attorno all'asse $z$.

l'*iperboloide a due falde* di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = -1$, ottenuto ruotando attorno all'asse $z$ la curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \sinh t \\ 0 \\ \pm b \cosh t \end{pmatrix}, \ t \in [-\pi/2, \pi/2], \quad a, \ b > 0.$$



L'iperboloide ottenuto ruotando la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\sinh t \\ 0 \\ \pm 4\cosh t \end{pmatrix}$, attorno all'asse $z$.

Calcolando $S_t = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta \\ f'(t)\sin\theta \\ g'(t) \end{pmatrix}$ e $S_\theta = \begin{pmatrix} -f(t)\sin\theta \\ f(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, troviamo che i punti singolari di $S$, quelli in cui il rango della matrice

$$[S_t\ S_\theta] = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta & -f(t)\sin\theta \\ f'(t)\sin\theta & f(t)\cos\theta \\ g'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

è minore di due, sono precisamente le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} f'(t)f(t) = 0 \\ g'(t)f(t)\sin\theta = 0 \\ g'(t)f(t)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Poiché la curva $\gamma$ è regolare e $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, si ha che gli unici punti singolari di $S$ (qui $S$ indica *questa particolare* parametrizzazione della superficie) sono quelli per cui $f(t) = 0$, dove la curva che genera la superficie tocca l'asse di rotazione. Nei punti regolari, non è restrittivo assumere $f(t) > 0$.
Sia $P = S(t_0, \theta_0) \in S$ un punto regolare. Il piano tangente ad $S$ in $P$ è il piano per $P$ parallelo ai vettori $\{S_t, S_\theta\}$ ed ha equazione cartesiana $N \cdot X = N \cdot P$, dove

$$N = \begin{pmatrix} -g'f(t_0)\cos\theta_0 \\ -g'(t_0)f(t_0)\sin\theta_0 \\ f'(t_0)f(t_0) \end{pmatrix} \frac{1}{f(t_0)\sqrt{f'(t_0)^2 + g'(t_0)^2}} = \begin{pmatrix} -g'(t_0)\cos\theta_0 \\ -g'(t_0)\sin\theta_0 \\ f'(t_0) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{f'(t_0)^2 + g'(t_0)^2}}.$$

è il versore normale alla superficie in $P$.
Nel punto $P$, i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = f'^2 + g'^2, \quad F = 0, \quad G = f^2, \qquad EG = f^2(f'^2 + g'^2), \qquad \text{in } \ t = t_0;$$

i coefficienti della seconda forma fondamentale sono dati da

$$e = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(f'g'' - g'f''), \quad f = 0, \quad g = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} g'f, \qquad \text{in } \ t = t_0;$$

infine, la curvatura media e la curvatura gaussiana di $S$ in $P$ sono date rispettivamente da

$$H = \frac{1}{2}(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}) = \frac{1}{2}(\frac{(f'g'' - g'f'')}{(f'^2 + g'^2)^{3/2}} + \frac{g'f}{f^2\sqrt{f'^2 + g'^2}}) \qquad K = \frac{eg}{EG} = \frac{(f'g'' - g'f'')g'f}{f^2(f'^2 + g'^2)^2}, \quad \text{in } \ t = t_0.$$

Dalle formule precedenti, vediamo che in tutti i punti sullo stesso parallelo le forme fondamentali coincidono (in quanto dipendono solo da $t$) e lo stesso vale per curvatura media e curvatura gaussiana. Poiché le due forme quadratiche fondamentali sono diagonali, abbiamo che le curvature principali sono

$$k_1 = \frac{e}{E}, \qquad k_2 = \frac{g}{G}$$

e le direzioni principali sono rispettivamente le curve $\theta = \theta_0$ (i meridiani o generatrici) e le curve $t = t_0$ (i paralleli) (vedi Esercizio 2, Foglio 7).

**Esempio.** Applichiamo le formule ottenute qui sopra nel caso dell'ellissoide di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$, ottenuto ruotando attorno all'asse $z$ la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 0 \\ 4\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Per $t \neq \pm\pi/2$, la curvatura gaussiana è data da

$$K(t) = \frac{1}{(1 + 3\cos^2 t)^2},$$

da cui segue che tutti punti regolari di $S$ sono ellittici. Segue inoltre che la curvatura gaussiana è minima per $t = 0$, ossia nei punti in cui anche la curvatura della curva generatrice è minima, e cresce al tendere di $t$ verso $\pm\pi/2$.