3. Superfici rigate.

Una *superficie rigata* è una superficie $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ della forma

$$S(u,v) = Q(u) + v\,\mathbf{r}(u), \qquad Q(u) = \begin{pmatrix} Q_1(u) \\ Q_2(u) \\ Q_3(u) \end{pmatrix},\ \mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \\ r_3(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

La curva descritta dal punto $Q(u)$, al variare di $u \in \mathbb{R}$, si chiama *direttrice* della superficie.

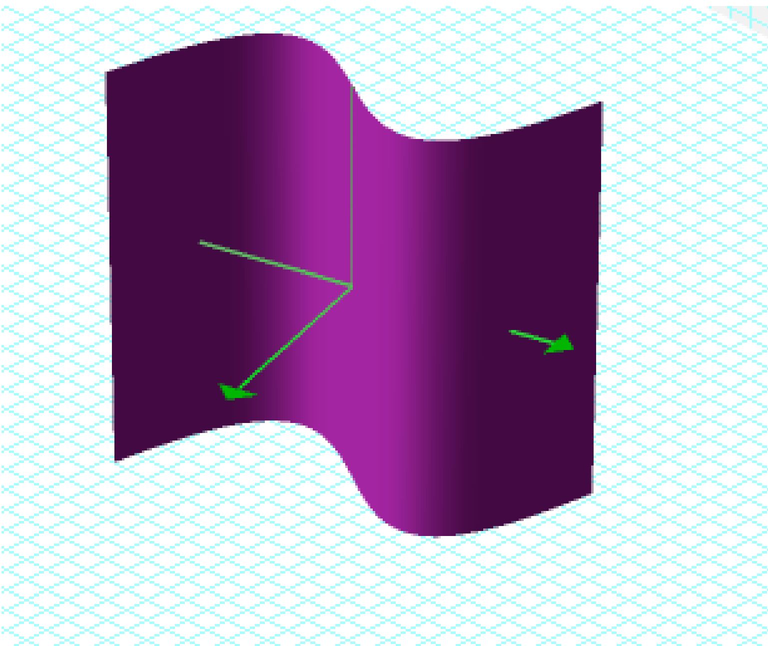
Per ogni $u = u_0$ fissato, $S(u_0,v) = Q(u_0) + v\mathbf{r}(u_0)$ è una retta passante per $Q(u_0)$ e avente direzione $r(u_0)$: queste rette si chiamano le *generatrici* della superficie.

Esempi di superfici rigate sono

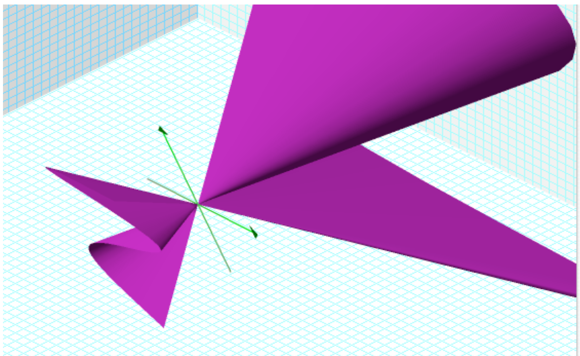
$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cilindro su una curva piana,}$$

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} r_1(u) \\ r_2(u) \\ r_3(u) \end{pmatrix} \quad \text{cono,}$$

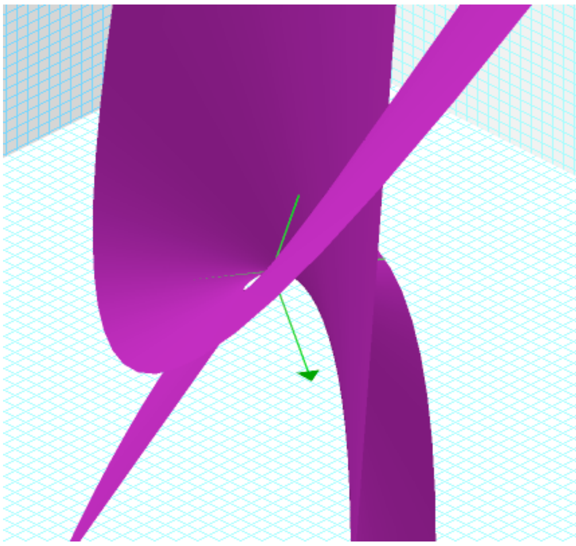
$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ \gamma_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \\ \gamma_2'(u) \\ \gamma_3'(u) \end{pmatrix} \quad \text{superficie della tangenti ad una curva dello spazio.}$$



Il cilindro sulla curva $\gamma(u) = \begin{pmatrix} u\cos u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$.



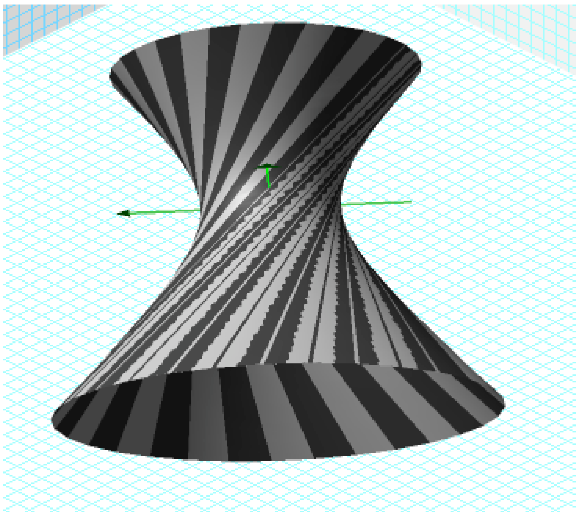
Il cono $S(u,v) = Q + v\mathbf{r}(u)$, per $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u^2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



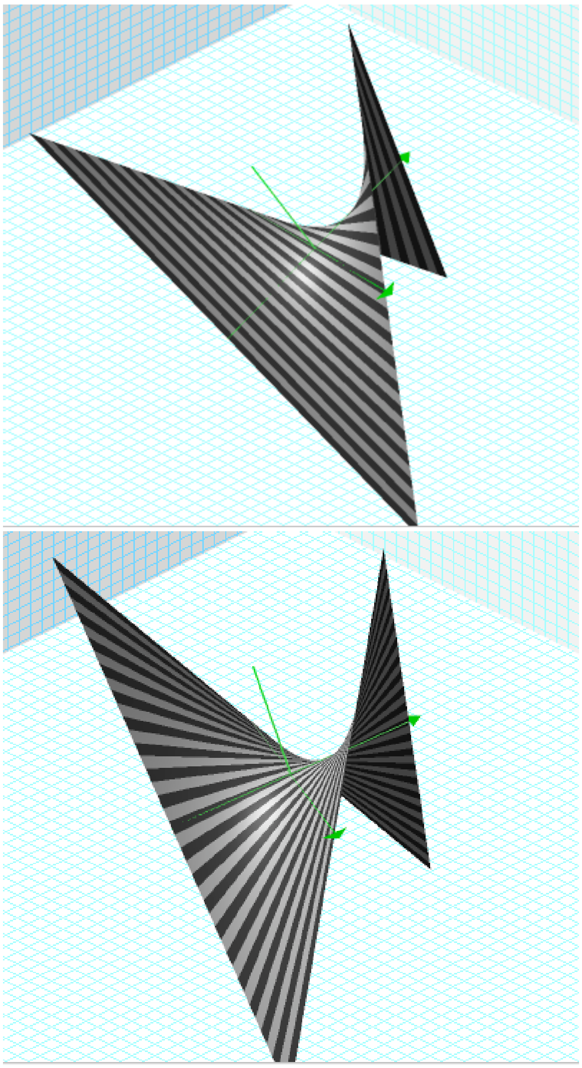
La superficie delle tangenti alla cubica $\gamma(u) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$.

Altri esempi di superfici rigate sono l'*iperboloide ad una falda* , la *sella*, l'*elicoide*, etc.... L'iperboloide ad una falda, di equazione $x^2 + y^2 = 1 + z^2$, può essere parametrizzato infatti come

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u - v \sin u \\ \sin u + v \cos u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi],\ v \in \mathbb{R}.$$



L'iperboloide ad una falda.



La sella $S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$ e due famiglie diverse di rette generatrici.

• *La curvatura gaussiana in ogni punto di una superficie rigata è minore o uguale a zero.*

Dim. Il versore normale alla superficie, i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S sono dati rispettivamente da

$$N(u,v) = \frac{(Q'(u) + v\mathbf{r}'(u)) \wedge \mathbf{r}(u)}{\|(Q'(u) + v\mathbf{r}'(u)) \wedge \mathbf{r}(u)\|}, \qquad S_u = Q'(u) + v\mathbf{r}'(u), \quad S_v = \mathbf{r}(u),$$

$$E = \|Q'(u) + v\mathbf{r}'(u)\|^2, \quad G = \|\mathbf{r}(u)\|^2, \quad F = Q'(u) \cdot \mathbf{r}'(u) + v\mathbf{r}'(u) \cdot \mathbf{r}(u),$$

$$e = (Q''(u) + v\mathbf{r}''(u)) \cdot N, \qquad g = 0, \qquad f = \mathbf{r}'(u) \cdot N$$

Osserviamo che S è singolare nei punti in cui $(Q'(u) + v\mathbf{r}'(u)) \wedge \mathbf{r}(u) = 0$: in questi punti S_u ed S_v non sono linearmente indipendenti. Nei punti regolari, la curvatura Gaussiana è data da

$$K = \frac{-f^2}{EG - F^2} \leq 0.$$

Osserviamo anche che la retta generatrice passante per un punto $P \in S$, è contenuta nel piano tangente ad S in P ed è una tangente asintotica.

Definizione. Una superficie rigata è *sviluppabile* se può essere localmente deformata in un aperto del piano senza cambiare le misure di angoli e lunghezze. Ciò avviene se il piano tangente alla superficie lungo una generatrice è costante.

Vale la seguente caratterizzazione:
Una superficie rigata è sviluppabile se e solo se $Q'(u_0), \mathbf{r}(u_0), \mathbf{r}'(u_0)$ *sono complanari, per ogni* u_0 *fissato.*

Dim. Consideriamo i punti di una generatrice fissata $P(v) = Q(u_0) + v\mathbf{r}(u_0)$, con $v \in \mathbb{R}$. Il piano tangente alla superficie in $P(v)$ ha equazione

$$N(u_0, v) \cdot X = N(u_0, v) \cdot P(v) \quad \Leftrightarrow \quad (Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \cdot X = (Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \cdot Q(u_0) + v\mathbf{r}(u_0)$$

$$\Leftrightarrow (Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \cdot X = ((Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0)) \cdot Q(u_0).$$

Dall'equazione si vede che, per ogni v_0 fissato, il piano tangente a $P(v_0)$ contiene tutti i punti della direttrice $P(v)$; infatti

$$(Q'(u_0) + v_0\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \cdot (Q(u_0) + v\mathbf{r}(u_0)) = ((Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0)) \cdot Q(u_0), \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Resta adesso da determinare sotto quali condizioni il vettore normale al piano $N(u_0, v)$, che è parallelo a $(Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0)$, ha direzione costante, ossia indipendente da v. Ciò avviene se e solo se

$$(Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \;//\; (Q'(u_0) + v_0\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0), \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

$$\Leftrightarrow \quad (Q'(u_0) + v\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \;\wedge\; (Q'(u_0) + v_0\mathbf{r}'(u_0)) \wedge \mathbf{r}(u_0) \equiv 0, \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{r}'(u_0) \wedge \mathbf{r}(u_0) \;\wedge\; Q'(u_0) \wedge \mathbf{r}(u_0) \equiv 0, \quad \forall v \in \mathbb{R},$$

se e solo se $\mathbf{r}'(u_0)$, $\mathbf{r}(u_0)$, $Q'(u_0)$ sono complanari. Questa condizione si esprime mediante

$$\det(\mathbf{r}'(u_0),\ \mathbf{r}(u_0),\ Q'(u_0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r}'(u) \cdot (Q'(u) \wedge \mathbf{r}(u)) = 0.$$

Corollario. Poiché $K = \frac{-f^2}{EG-F^2}$, dove

$$f = \frac{\mathbf{r}'(u) \cdot (Q'(u) \wedge \mathbf{r}(u))}{\|(Q'(u) + v\mathbf{r}'(u)) \wedge \mathbf{r}(u)\|},$$

è immediato che (nei punti regolari) *la curvatura gaussiana di una superficie rigata sviluppabile è identicamente nulla:* $K \equiv 0$.

I cilindri, i coni e le supefici delle tangenti ad una curva sono superfici rigate sviluppabili:

nel primo caso, i vettori $Q'(u) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \\ \gamma_2'(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}'(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono complanari;

nel secondo caso, i vettori $Q'(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}(u), \mathbf{r}'(u)$ sono complanari;

nel terzo caso, i vettori $Q'(u) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \\ \gamma_2'(u) \\ \gamma_3'(u) \end{pmatrix}, \mathbf{r}(u) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(u) \\ \gamma_2'(u) \\ \gamma_3'(u) \end{pmatrix}, \mathbf{r}'(u) = \begin{pmatrix} \gamma_1''(u) \\ \gamma_2''(u) \\ \gamma_3''(u) \end{pmatrix}$ sono complanari.

In realtà, i cilindri, *i coni e le supefici delle tangenti ad una curva sono tutte e sole le superfici rigate sviluppabili.*