Isometrie.

1. Generalità.

Una trasformazione di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione *biiettiva* $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Le trasformazioni si possono *comporre* tra loro: se f e g sono due applicazioni biiettive da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^n$, allora la composizione $f \circ g$, definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione biiettiva da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Nota bene che $f \circ g$ si legge "f *composto* g", a indicare che prima si applica g al vettore $\mathbf{x}$ e poi si applica f al vettore $g(\mathbf{x})$. In generale, $f \circ g$ è diversa dall'applicazione $g \circ f$.

La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa:*

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

Un'applicazione biiettiva f è invertibile. L'*inversa* $f^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfa $f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x}$ nel dominio di f e soddisfa $f(f^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{y}$ nel codominio di f.

Studieremo le trasformazioni del piano $\mathbb{R}^2$ e dello spazio $\mathbb{R}^3$ di particolare significato geometrico. Iniziamo dimostrando alcuni fatti generali sulle isometrie.

2. Isometrie e affinità.

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico e la distanza indotta.

Definizione. Un'applicazione $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria se conserva la distanza

$$d(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Questo equivale a: $\quad \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$

Osservazione.

• Un'isometria è necessariamente iniettiva:
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tali che $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$. Questo equivale a $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = 0$. D'altra parte $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ implica $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$, da cui $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
Vedremo in seguito che un'isometria è anche suriettiva e dunque biiettiva (cf. Corollario 2.6 e Osservazione 2.7). Dunque un'isometria è una trasformazione di $\mathbb{R}^n$.

• La composizione $f \circ g$ di due isometrie di $\mathbb{R}^n$ è ancora un'isometria:
infatti conserva le distanze

$$d((f \circ g)(\mathbf{x}), (f \circ g)(\mathbf{y})) = d(f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y}))) = d(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

• L'inversa di un'isometria è un'isometria: infatti soddisfa

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(f^{-1}(f(\mathbf{x})), f^{-1}(f(\mathbf{y}))).$$

Esempio. Le traslazioni

$$T_{\mathbf{p}}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}+\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$$

($\mathbf{p}$ è il *passo* della traslazione $T_{\mathbf{p}}$) sono isometrie. Infatti

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{p}-(\mathbf{y}+\mathbf{p})| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

L'inversa di una traslazione di passo $\mathbf{p}$ è una traslazione di passo $-\mathbf{p}$

$$T_{\mathbf{p}}^{-1} = T_{-\mathbf{p}}.$$

Lemma 2.1. *Sia $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria con $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Allora*
(i) F conserva la norma: $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(ii) F conserva il prodotto scalare: $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (i) Poiché $\|F(\mathbf{x})-F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, in particolare per $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ vale $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.
(ii) Dalla relazione $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$, otteniamo $\|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Per l'invarianza della norma, segue che $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Proposizione 2.2. *Sia $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria. Allora F è lineare (data dalla moltiplicazione matrice-vettore) se e solo se $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Dim. Se F è lineare, necessariamente $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Viceversa, supponiamo che $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dobbiamo dimostrare che $F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$ e che $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$, per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché F conserva la norma ed il prodotto scalare, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\|^2 =& \|F(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 + \|F(\mathbf{x})\|^2 + \|F(\mathbf{y})\|^2 \\
&+ 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot F(\mathbf{y}) \\
=& \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&+ 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\
=& (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \\
=& \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Allo stesso modo

$$\|F(\lambda\mathbf{x}) - \lambda F(\mathbf{x})\|^2 = \|F(\lambda\mathbf{x})\|^2 + \|\lambda F(\mathbf{x})\|^2 - 2\lambda F(\lambda\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{x}) = \ldots = 0,$$

e la tesi è dimostrata.

Osservazione 2.3. Sia $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'isometria lineare (data dalla moltiplicazione matrice-vettore). Ricordiamo che un'applicazione lineare iniettiva di $\mathbb{R}^n$ in sè è necessariamente biiettiva. Inoltre, per il lemma precedente manda basi ortonormali in basi ortonormali. Se M è la matrice rappresentativa di F (nella base canonica in dominio e codominio), le colonne di M formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Una matrice con questa proprietà si chiama *matrice ortogonale*. Algebricamente è caratterizzata dalla condizione ${}^tM \cdot M = Id$.

Esercizio 2.4. Sia M una matrice ortogonale.
(i) Far vedere che M^{-1} e ${}^tM$ sono matrici ortogonali.
(ii) Far vedere che $\det M = \pm 1$.
(iii) Far vedere che se λ è una autovalore reale di M, allora $\lambda = \pm 1$.
(iv) Far vedere che se $V \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio e $MV = V$, allora anche $MV^\perp = V^\perp$.

Esercizio 2.5.
(i) Far vedere che il prodotto di due matrici ortogonali è una matrice ortogonale.
(ii) Far vedere che

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

sono matrici ortogonali, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Corollario 2.6. *Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le applicazioni della forma*

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove M è una matrice ortogonale *e* $\mathbf{b}$ *è un vettore in $\mathbb{R}^n$. In altre parole, tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$ si ottengono dalla composizione di una traslazione con una isometria lineare.*

Dimostrazione. Sia F un'isometria e sia $F(\mathbf{0}) = \mathbf{b}$. La composizione $T_{-\mathbf{b}} \circ F$ è un'isometria che manda l'origine in sè

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{0}) = T_{-\mathbf{b}}(F(\mathbf{0})) = T_{-\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Per la proposizione, $T_{-\mathbf{b}} \circ F$ è un'isometria lineare, per cui esiste una matrice ortogonale M tale che

$$T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Componendo $T_{\mathbf{b}}$ con entrambi i termini e tenendo conto che $T_{-\mathbf{b}} = T_{\mathbf{b}}^{-1}$, troviamo

$$T_{\mathbf{b}} \circ T_{-\mathbf{b}} \circ F(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{b}} \circ M\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ossia $F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b}$, come richiesto.

Osservazione 2.7. All'inizio della sezione abbiamo dimostrato che un'isometria è necessariamente iniettiva. Dal Corollario 2.6 risulta che un'isometria è data dalla composizione di una traslazione, che è biiettiva, e un'isometria lineare iniettiva, anch'essa biiettiva (cf. Osservazione 2.3). Dunque un'isometria di $\mathbb{R}^n$ è necessariamente biiettiva.

Definizione. Una trasformazione lineare affine di $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione della forma

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove M è una matrice *invertibile* e $\mathbf{b}$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$.

Queste trasformazioni hanno diverse proprietà in comune con le trasformazioni lineari. Le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ mandano rette in rette, piani in piani,..., sottospazi affini in sottospazi affini (i sottospazi affini sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ o traslati di sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$). Inoltre rispettano parallelismo e incidenza: mandano rette parallele in rette parallele, rette incidenti in rette incidenti, piani paralleli in piani paralleli, etc... Poiché lo stesso vale per le traslazioni, vale anche per tutte le trasformazioni lineari affini, che sono composizioni di traslazioni e di trasformazioni lineari.
In generale, le trasformazioni lineari affini non conservano distanze, angoli, né volumi.

Per il Corollario 2.6, le isometrie di $\mathbb{R}^n$, dette anche *trasformazioni rigide*, sono *particolari* trasformazioni lineari affini che conservano distanze, angoli e volumi.

Esempio. Sia r è una retta in $\mathbb{R}^n$ di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se M è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$, la retta immagine di r tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, se π è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

il piano immagine di π tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Infine, se $T_\mathbf{q}$ è una traslazione di passo $\mathbf{q}$ in $\mathbb{R}^n$, l'immagine di r tramite $T_\mathbf{q}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R};$$

l'immagine di π tramite $T_\mathbf{q}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Esempi di isometrie del piano.
(1) La *traslazione* $T_\mathbf{p}$ di passo $\mathbf{p}$

$$T_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}, \qquad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2.$$

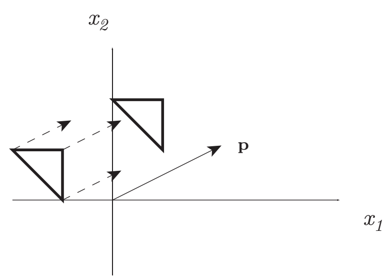

Fig.1 La traslazione $T_\mathbf{p}$.

(2) La rotazione di un angolo φ intorno all'origine

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se $\varphi > 0$, la rotazione va intesa in senso "antiorario". Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso "orario".

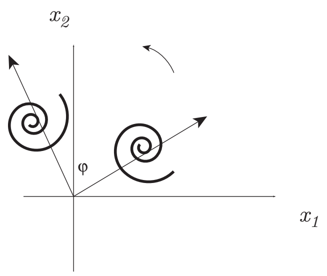

Fig.2 La rotazione R_φ.

(3) La riflessione

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ad esso simmetrico rispetto alla retta che passa per $\mathbf{0}$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.

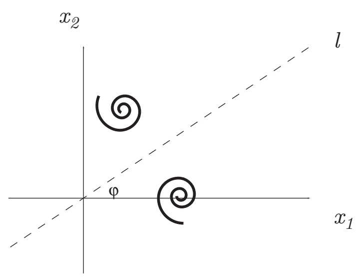

Fig.3 La riflessione S_φ.

Esempio. La rotazione $R_{\pi/4}$ di centro $\mathbf{0}$ e di angolo $\varphi = \pi/4$ è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Esempio. La retta l data da $x_1 = x_2$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad l è data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Esempi di isometrie dello spazio.

(1) La *traslazione* $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p}$

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}, \qquad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3.$$

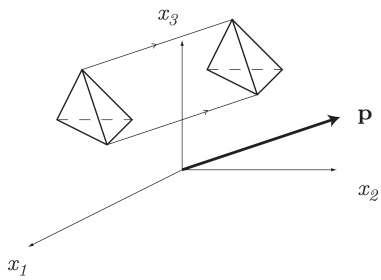

Fig.4. La traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(2) La rotazione di un angolo φ intorno al vettore $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se $\varphi > 0$, la rotazione indotta sul piano (x_2, x_3) va intesa in senso antiorario. Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso "orario".

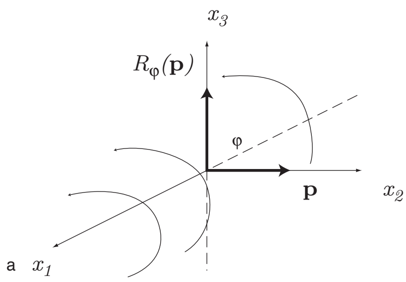

Fig.5. La rotazione R_φ.

(3) La riflessione rispetto al piano di equazione $x_3 = 0$

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

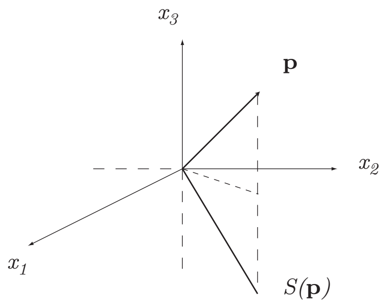

Fig.6. La riflessione S rispetto al piano $x_3 = 0$.

(4) La riflessione $U_{\mathbf{0}}$ rispetto all'origine $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$

$$U_{\mathbf{0}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

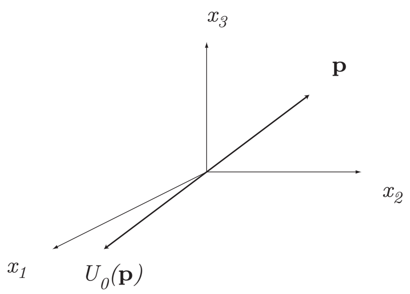

Fig.7. La riflessione $U_{\mathbf{0}}$ rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

Esempio. La rotazione $R_{\pi/4}$ in $\mathbf{R}^3$ è data da

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

• Per una matrice ortogonale M, vale $\det M = \pm 1$. Si può dimostrare che una matrice ortogonale 3×3 con determinante uguale a 1 è la matrice di una rotazione intorno ad una retta (orientata) passante per l'origine, e che una matrice ortogonale 3×3 con determinante uguale a -1 è la matrice di una rotazione intorno ad una retta per l'origine seguita da una riflessione rispetto ad un piano per l'origine. Questo significa che le rotazioni intorno ad una retta per l'origine e le rotazioni intorno ad una retta per l'origine seguite da una riflessione rispetto ad un piano per l'origine esauriscono tutte le isometrie lineari di $\mathbf{R}^3$. Per il Corollario 2.6, tutte e sole le isometrie di $\mathbf{R}^3$ sono date dalla composizione di una traslazione con una rotazione intorno ad una retta (orientata) per l'origine oppure da una traslazione composta con una riflessione rispetto ad un piano per l'origine composta con una rotazione intorno ad una retta (orientata) per l'origine.

Sia M una matrice ortogonale 3×3. Si ha che $\det M = \pm 1$ ((cfr. Esercizio 2.4(ii)). Inoltre, essendo una matrice reale di ordine dispari, M ha almeno un autovalore reale $\lambda_0 = \pm 1$ (cfr. Esercizio 2.4(iii)).

Esaminiamo i vari casi:

(1.a) Siano $\det M = 1$ e $\lambda_0 = 1$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente, con $\mathbf{x}_1$ autovettore di autovalore 1. In questa base, la matrice dell'isometria definita da M è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale 2×2 con determinante uguale a 1. Ne segue che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ed M rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno al vettore $\mathbf{x}_1$.

(1.b) Siano $\det M = 1$ e $\lambda_0 = -1$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente, con $\mathbf{x}_1$ autovettore di autovalore -1. In questa base, la matrice dell'isometria definita da M è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale 2×2 con determinante uguale a -1. Ne segue che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

e che i rimanenti autovalori di M sono $\mu = 1$, $\nu = -1$. Se nella base $\mathcal{B}$ i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sono autovettori di autovalore -1 e $\mathbf{x}_3$ è autovettore di autovalore 1, la matrice dell'isometria definita da M è precisamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

In questo caso, M rappresenta la rotazione di un angolo $\theta = \pi$ intorno al vettore $\mathbf{x}_3$. La discussione dei punti (1.a) e (1.b) dimostra quindi che una matrice ortogonale con determinante uguale a 1 rappresenta una rotazione.

(2) Se $\det M = -1$, scriviamo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M, \qquad \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M\right) = 1.$$

Ricordiamo che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rappresenta la simmetria rispetto al piano (x_1, x_2). Questo fatto insieme alla discussione dei punti (1.a) e (1.b) dimostra che una matrice ortogonale con determinante uguale a -1 rappresenta la composizione di una simmetria con una rotazione.