Esempi di superfici.

1. Grafici di funzioni.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio in $\mathbb{R}^2$ e sia $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞. Il suo grafico è una supeficie parametrizzata in $\mathbb{R}^3$ della forma

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}.$$

La superficie S è *regolare in ogni punto*, in quanto i vettori

$$S_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad S_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}.$$

sono linearmente indipendenti per ogni $(u,v) \in \Omega$. (Con F_u, F_v, indichiamo le derivate parziali di una funzione $F = F(u,v)$, rispetto a u e rispetto a v). Il versore normale ad S è dato da

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} (u,v), \tag{1}$$

e il piano tangente in un punto $S(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$N(u_0,v_0) \cdot X = N(u_0,v_0) \cdot S(u_0,v_0).$$

I coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S sono dati rispettivamente da

$$E = S_u \cdot S_u = 1 + f_u^2, \quad F = S_u \cdot S_v = f_u f_v, \quad G = S_v \cdot S_v = 1 + f_v^2,$$

$$e = N \cdot S_{uu} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \quad f = N \cdot S_{uv} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}, \quad N \cdot S_{vv} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}.$$

La matrice associata alla seconda forma fondamentale è multipla della matrice hessiana di f

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Per la formula (1), nei punti $S(u_0,v_0)$, corrispondenti a punti critici di f, dove $f_u(u_0,v_0) = f_v(u_0,v_0) = 0$, il piano tangente ad S è un piano orizzontale. Per la formula (2), tali punti sono ellittici se corrispondono a punti critici non degeneri, di massimo o di minimo per f.

La curvatura media e la curvatura gaussiana di S sono date rispettivamente da

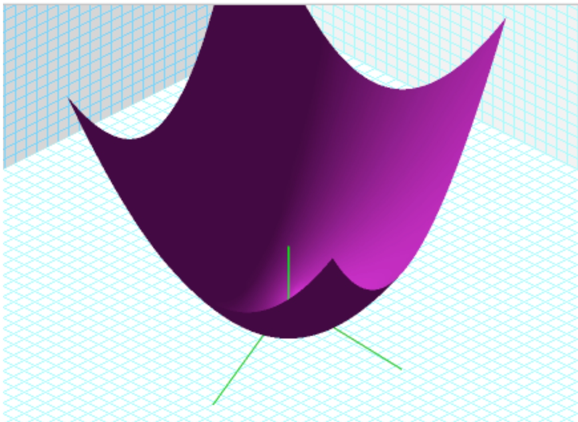
$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{vv}^2}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2}\frac{(1+f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1+f_v^2)f_{uu}}{(\sqrt{1+f_u^2+f_v^2})^3}.$$

(Ricordiamo che tutte le derivate di f coinvolte nelle varie formule e dunque anche i coefficienti E, F, G, e, f, g delle forme quadratiche fondamentali, la curvatura gaussiana e la curvatura media di S sono funzioni di (u,v)).

Esaminiamo adesso alcuni esempi di superfici che sono grafici di funzioni di due variabili: vedremo che solo nelle vicinanze dei punti ellittici e dei punti iperbolici (dove la seconda forma quadratica è non degenere) il comportamento locale della superficie è ben determinato. Nelle vicinanze dei punti planari o parabolici si possono avere invece comportamenti diversi.

Esempio. 1. **(Paraboloide)** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(u,v) = u^2 + v^2$. Il grafico di f è la superficie data da

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}.$$



Il grafico della funzione $f(u,v) = u^2 + v^2$.

Al variare di $u, v \in \mathbb{R}$, il piano tangente è un piano passante per $S(u,v)$ e parallelo ai vettori

$$S_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad S_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix};$$

il versore normale è dato da

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S sono dati rispettivamente da

$$E = S_u \cdot S_u = 1 + 4u^2, \quad F = S_u \cdot S_v = 4uv, \quad G = S_v \cdot S_v = 1 + 4v^2$$

$$e = N \cdot S_{uu} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \quad f = N \cdot S_{uv} = 0, \quad N \cdot S_{vv} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

La curvatura media e la curvatura gaussiana di S sono date rispettivamente da

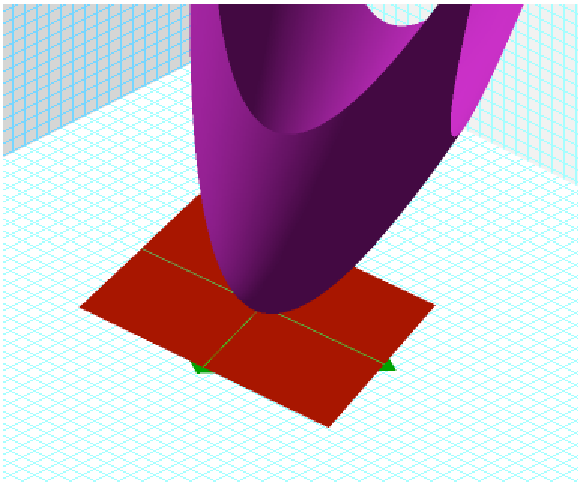
$$H = \frac{4(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}}, \qquad K = \frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}.$$

Poiché la curvatura gaussiana è positiva in ogni punto, tutti i punti di S sono *ellittici* e non ammettono tangenti asintotiche. In altre parole tutte le curve su S, passanti per uno stesso punto P, hanno la concavità rivolta dalla stessa parte.

Prendiamo ad esempio il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$. Il piano tangente ad S in P è il piano orizzontale $z = 0$. La superficie sta tutta dalla stessa parte di tale piano e lo tocca solo nel punto di tangenza. Poiché per $u = v = 0$

$$F = f = 0, \qquad \frac{E}{e} = \frac{G}{g},$$

il punto P è un punto ombelicale: tutte le curve su S, passanti per P, hanno la stessa curvatura normale in P.



Il piano tangente al paraboloide nel punto $S(0, 0)$.

Consideriamo adesso queste due curve su S:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

e confrontiamo la curvatura con la curvatura normale nei due casi. La curva γ è ottenuta intersecando S con il piano verticale $x = y$, la seconda intersecando S con il piano orizzontale $z = 1$.

Il versore normale a γ e la sua curvatura sono dati rispettivamente da

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + 8t^2}}, \qquad k = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{2}{(1 + 8t^2)^{3/2}};$$

la sua curvatura normale è data da

$$k_N(\gamma) = \frac{N \cdot \gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} = \frac{2}{(1 + 8t^2)^{3/2}}$$

e coincide con la curvatura. Questo non è un caso, ma dipende dal fatto che lungo tutta la curva il versore normale alla curva e la normale N alla superficie coincidono.

$$\mathbf{n}(\gamma(t)) = N(\gamma(t)).$$

Ne segue che la curvatura e la curvatura normale di γ hanno lo stesso modulo ed anche lo stesso segno.

Il versore normale a $\tilde{\gamma}$ e la curvatura sono dati rispettivamente da

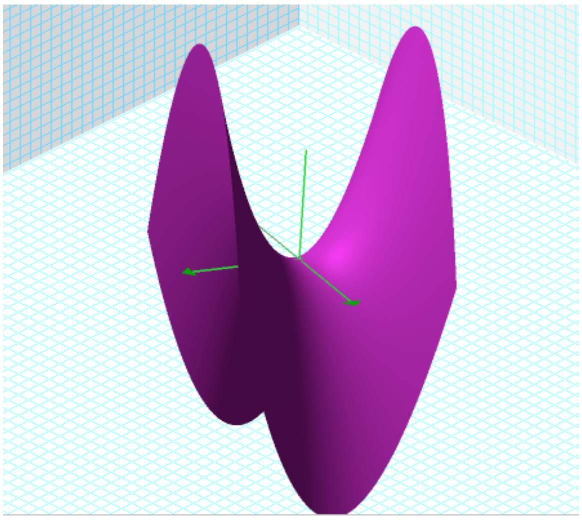
$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k(t) \equiv 1.$$

($\tilde{\gamma}$ è parametrizzata dalla lunghezza d'arco). In questo caso, il versore normale alla curva $\mathbf{n}(t)$ e il versore normale alla superficie $N(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2\cos t \\ -2\sin t \\ 1 \end{pmatrix}$ lungo $\tilde{\gamma}$ non sono nemmeno collineari. Per cui la curvatura e la curvatura normale di $\tilde{\gamma}$ sono necessariamente diverse:

$$k(t) \equiv 1 \neq k_N(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Esempio. 2. **(Sella)** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(u,v) = u^2 - v^2$. Il grafico di f è la superficie data da

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$



Il grafico della funzione $f(u,v) = u^2 - v^2$.

Al variare di $u, v \in \mathbb{R}$, il piano tangente è un piano passante per $S(u,v)$ e parallelo ai vettori

$$S_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad S_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix};$$

il versore normale è dato da

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}\begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S sono dati rispettivamente da

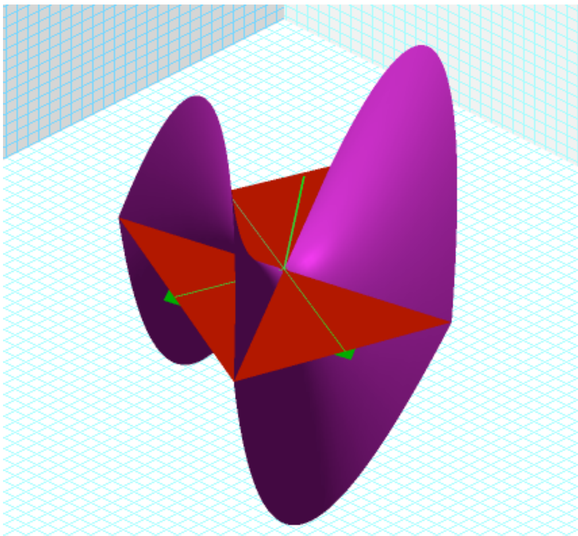
$$E = S_u \cdot S_u = 1 + 4u^2, \quad F = S_u \cdot S_v = -4uv, \quad G = S_v \cdot S_v = 1 + 4v^2;$$

$$e = N \cdot S_{uu} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}, \quad f = N \cdot S_{uv} = 0, \quad N \cdot S_{vv} = \frac{-2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

La curvatura media e la curvatura gaussiana di S sono date rispettivamente da

$$H = \frac{8(v^2-u^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}}, \qquad K = \frac{-4}{(1+4u^2+4v^2)^2}.$$

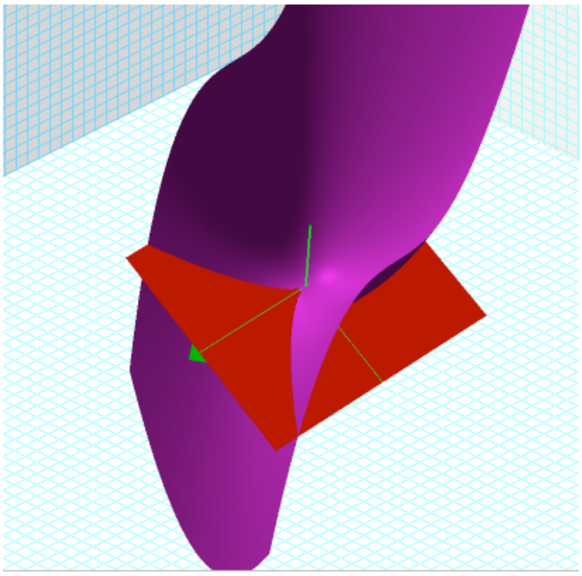
Poiché la curvatura gaussiana è negativa in ogni punto, tutti i punti di S sono iperbolici: fra tutte le curve su S passanti per uno stesso punto P, ce ne è con curvatura normale minima (negativa), una con curvatura normale massima (positiva) e ci sono due tangenti asintotiche distinte con curvatura normale nulla. Prendiamo ad esempio il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$. Si vede facilmente che le curve $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$ e $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t^2 \end{pmatrix}$, su S passanti per P, hanno la concavità rivolta l'una opposta all'altra. Il piano tangente ad S in P è il piano orizzontale $z = 0$. La superficie non sta tutta dalla stessa parte di tale piano. L'intersezione di S con tale piano è formata dalle due rette $\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ che giacciono sulla superficie e sono proprio le tangenti asintotiche ad S in P.



Il piano tangente alla sella nel punto $S(0,0)$.

Esempio. 3. **(Sella cubica)** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(u,v) = u^2 + v^3$. Il grafico di f è la superficie data da

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^3 \end{pmatrix}.$$



Il grafico della funzione $f(u,v) = u^2 + v^3$ e il piano tangente alla superficie in $S(0,0)$.

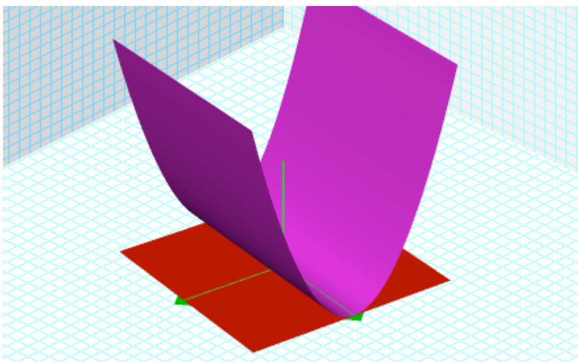
Ci limitiamo ad considerare il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$. Con calcoli analoghi a quelli dei casi precedenti, troviamo che in P il piano tangente ad S è il piano orizzontale $z = 0$ e la seconda forma quadratica fondamentale è data da

$$e = 2, \quad f = g = 0, \qquad K = 0.$$

Il punto P è parabolico: tutte le curve su S passanti per P hanno curvatura normale non negativa e c'è un'unica tangente asintotica in P. In altre parole, tutte le altre sezioni normali di S in P, hanno curvatura normale positiva in P. La curva $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix}$ è l'unica sezione normale in P (data dall'intersezione di S con il piano verticale $x = 0$) con curvatura normale nulla in P. Come si vede dalla figura, in questo caso, nessun intorno di P in S sta tutto dalla stessa parte del piano tangente ad S in P.

Esempio. 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(u,v) = u^2$. Il grafico di f è la superficie data da

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 \end{pmatrix}.$$

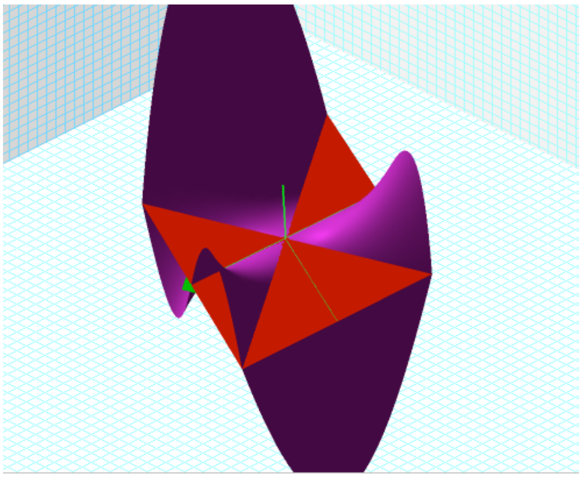


Il grafico della funzione $f(u,v) = u^2$ e il piano tangente alla superficie in $S(0,0)$.

Come nell'esempio precedente, il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ è un punto parabolico. Il piano tangente ad S in P, che è il piano orizzontale $z = 0$, aderisce alla superficie lungo tutta la retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (l'asse y) che risulta una tangente asintotica in P. Tutte le altre curve per P hanno invece curvatura normale dello stesso segno, avendo la concavità rivolta dalla stessa parte.

Esempio. 5. **(Sella di scimmia)** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(u, v) = u^3 + uv^2$. Il grafico di f è la superficie data da

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^3 - uv^2 \end{pmatrix}..$$



Il grafico della funzione $f(u, v) = u^3 + uv^2$ e il piano tangente alla superficie in $S(0, 0)$.

Anche in questo caso, ci limitiamo ad considerare il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

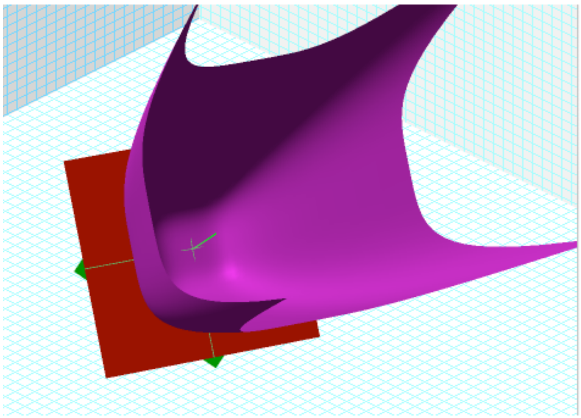
Con calcoli analoghi a quelli dei casi precedenti, troviamo che in P troviamo che in P il piano tangente ad S è il piano orizzontale $z = 0$ e la seconda forma quadratica fondamentale è data da

$$e = 0, \quad f = g = 0, \qquad K = 0.$$

Il punto P è *planare*: tutte le curve su S, passanti per P, hanno curvatura normale nulla in P. Tra esse ci sono le tre rette $u = 0$, $u + \sqrt{3}v = 0$, $u - \sqrt{3}v = 0$, intersezione di S con il piano tangente ad S in P. Anche in questo caso, nessun intorno di P in S sta tutto dalla stessa parte di tale piano.

Esempio. 6. **(Paraboloide quartico)** Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(u, v) = u^4 + v^4$. Il grafico di f è la superficie data da

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^4 + v^4 \end{pmatrix}.$$



Il grafico della funzione $f(u,v) = u^4 + v^4$ e il piano tangente alla superficie in $S(0,0)$.

Come nell'esempio precedente, il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$ è un punto planare. Tutte le curve su S passanti per P hanno curvatura normale nulle. In questo caso però, la superficie sta tutta dalla stessa parte dello spazio tangente ad S in P.