Forme quadratiche reali.

Una forma quadratica reale in n variabili $x_1, \ldots, x_n$ è un polinomio omogeneo di secondo grado a coefficienti reali

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Le forme quadratiche si distinguono per la loro *segnatura*, ossia per il segno che assumono al variare di $X \in \mathbb{R}^n$, con $X \neq 0$.

- Una forma quadratica F si dice *definita positiva* se $F(X) > 0$, per ogni $X \neq O$.
- Una forma quadratica F si dice *semidefinita positiva* se $F(X) \ge 0$, per ogni $X \neq O$.
- Una forma quadratica F si dice *definita negativa* se $F(X) < 0$, per ogni $X \neq O$.
- Una forma quadratica F si dice *semidefinita negativa* se $F(X) \le 0$, per ogni $X \neq O$.
- Una forma quadratica F si dice *indefinita* se, al variare di $X \neq O$, assume sia valori positivi che valori negativi,

Per determinare la segnatura di una forma quadratica F, conviene scriverla in forma matriciale come

$$F(X) = {}^tXAX,$$

dove

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{ed} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è la matrice simmetrica con coefficienti

$$a_{ii} = \mathrm{coeff}(x_i^2),\ i = 1, \ldots, n, \qquad a_{ij} = a_{ji} = \mathrm{coeff}(x_ix_j)/2,\ 1 \le i < j \le n.$$

Esempio. Una forma quadratica in due variabili è ad esempio

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2.$$

La matrice simmetrica associata è $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Esempio. Un esempio di forma quadratica in tre variabili è

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3$$

e la matrice simmetrica associata è $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sia M una matrice invertibile $n \times n$ e sia

$$X = MY \tag{1}$$

il corrispondente cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^n$. Se sostituiamo la relazione (1) nell'espressione della forma quadratica $F(X) = {}^tXAX$ troviamo

$$F(X) = {}^tXAX = {}^t(MY)A(MY) = {}^tY({}^tMAM)Y.$$

Dunque nelle coordinate $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ la matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$${}^tMAM.$$

Se il cambiamento di coordinate è dato da una matrice M ortogonale (caratterizzata dalla relazione ${}^tMM = I_n$), le matrici simmetriche A e ${}^tMAM$ sono coniugate:

$${}^tMAM = M^{-1}AM.$$

Poiché una matrice simmetrica A può essere diagonalizzata mediante una matrice ortogonale, ossia esiste una matrice ortogonale M tale che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

(vedi Appendice) vale il seguente risultato:

Proposizione. *Sia $F(X) = {}^tXAX$ una forma quadratica reale, dove A è una matrice simmetrica. Esiste un cambiamento di coordinate $X = MY$, dato da una matrice ortogonale M, che trasforma F in una forma quadratica nelle coordinate Y senza termini misti*

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \tag{2}$$

con coefficienti gli autovalori di A.

Corollario. *Siano λ_1 e λ_n rispettivamente il minimo e il massimo autovalore di A. Allora*

$$\lambda_1\|X\|^2 \leq F(X) \leq \lambda_n\|X\|^2.$$

Se X è autovettore di A relativo all'autovalore λ_1, allora $F(X) = \lambda_1\|X\|^2$. Analogamente, X è autovettore di A relativo all'autovalore λ_n, allora $F(X) = \lambda_n\|X\|^2$.

Dim. Dall'equazione (2) e dal fatto che $\|X\|^2 = \|MY\|^2 = \|Y\|^2$, abbiamo le stime richieste

$$F(X) = F(MY) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n\|Y\|^2 = \lambda_n\|X\|^2;$$

$$F(X) = F(MY) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_1\|Y\|^2 = \lambda_1\|X\|^2.$$

Se X è autovettore di A relativo all'autovalore λ_1, allora $F(X) = {}^tXAX = {}^tX\lambda_1 X = \lambda_1\|X\|^2$. Allo stesso modo si dimostra che se X è autovettore di A relativo all'autovalore λ_n, allora $F(X) = \lambda_n\|X\|^2$.

Osservazione. Il risultato della proposizione caratterizza le forme quadratiche in termini degli autovalori della matrice simmetrica A associata:

- Una forma quadratica F è *definita positiva* (risp. *definita negativa*) se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi (risp. negativi).

- Una forma quadratica F è *semidefinita positiva* (risp. *semidefinita negativa*) se e solo se tutti gli autovalori di A sono non negativi (risp. non positivi).

- Una forma quadratica F è *indefinita* se e solo se A ha sia autovalori positivi che negativi.

• Dalla classificazione delle forme quadratiche in due variabili segue la classificazione delle coniche nel piano, dalla classificazione delle forme quadratiche in tre variabili segue la classificazione delle quadriche dello spazio.

• La segnatura della forma quadratica associata all'Hessiano di una funzione in un punto critico determina la natura del punto critico stesso: si tratta di un minimo locale se la forma quadratica è definita positiva, di un massimo locale se la forma quadratica è definita negativa, né di un massimo né di un minimo se la forma è indefinita.

Appendice. Diagonalizzazione delle matrici simmetriche reali mediante matrici ortogonali.
Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica: ${}^tA = A$. La matrice A gode delle seguenti proprietà:

(i) A ha n autovalori reali, contati con la loro molteplicità. In altre parole, tutte le radici del polinomio caratteristico di A sono reali.

(ii) Se λ è una autovalore di A con molteplicità algebrica k, l'autospazio corrispondente V_λ ha dimensione k.

(iii) Autospazi relativi ad autovalori i distinti sono ortogonali.

Dai fatti (i)(ii)(iii) segue che

(iv) Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

(v) A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale: esiste una matrice M ortogonale $n \times n$ tale che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A. Infatti, se

$$\{v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}\}$$

è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A, la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

soddisfa (3).