

- (1) Sia  $\pi : X = P + tA + sB$ ,  $t, s \in \mathbf{R}$  una piano in  $\mathbf{R}^3$ .
- (i) Dimostrare che  $\pi$  è una superficie (parametrizzata) regolare in tutti i punti.
  - (ii) Calcolare il piano tangente e il versore normale ad  $\pi$  al variare di  $t, s$ .
  - (iii) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di  $\pi$ .
  - (iv) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di  $\pi$ .
- (2) Sia  $S = S(u, v)$  una superficie regolare. Sia  $P = S(u_0, v_0)$  un punto non planare e non umbilicale, dove i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale soddisfano

$$F = S_u \cdot S_u = 0, \quad f = N \cdot S_{uu} = 0.$$

Far vedere che le curvature principali (il massimo e il minimo della curvatura normale  $k_N(\gamma)$ , al variare delle curve  $\gamma$  su  $S$  passanti per  $P$ ) sono date da

$$k_1 = \frac{e}{E}, \quad k_2 = \frac{g}{G}$$

e sono assunte rispettivamente sulle curve  $u = u_0$  e  $v = v_0$ .

- (3) *Cilindro*. Sia  $S: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la superficie data da

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbf{R}.$$

- (i) Dimostrare che  $S$  coincide con la superficie data dall'equazione  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (ii) Dimostrare che  $S$  è regolare in tutti i punti e che in ogni punto di  $S$  il piano tangente è un piano verticale.
- (iii) Verificare che  $S$  è una superficie rigata sviluppabile.
- (iv) Verificare che  $S$  è una superficie di rotazione.
- (v) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di  $S$  e confrontarle con quelle di un piano.
- (vi) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di  $S$ .

- (4) Dimostrare che

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2u^2 + 2v^2 \end{pmatrix}, \quad T(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

sono parametrizzazioni equivalenti del paraboloide  $z = x^2 + y^2$ .

- (5) *Iperboloide a due falde*. Sia  $\gamma$  la curva del piano  $(y, z)$  data da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh t \\ 2 \cosh t \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

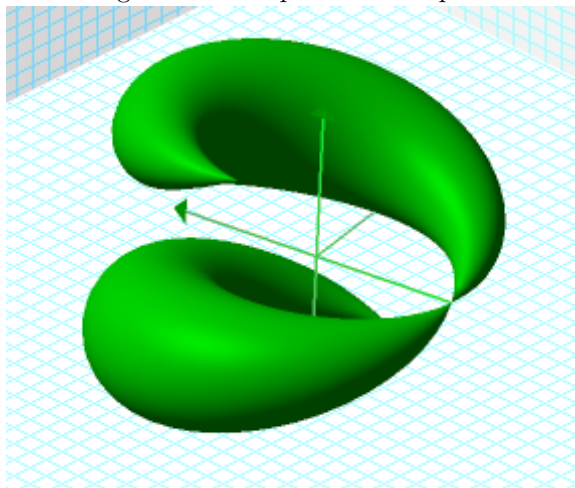
- (i) Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando  $\gamma$  attorno all'asse  $z$  e determinare un'equazione che definisce  $S$ .
- (ii) Determinare i punti in cui  $S$  è regolare.
- (iii) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di  $S$  nei punti regolari.
- (iv) Determinare il segno della curvatura gaussiana di  $S$  (nei punti regolari).

- (6) *Iperboloide a una falda.* Sia  $\gamma$  la curva del piano  $(y, z)$  data da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \\ 2 \sinh t \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .
- (i) Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando  $\gamma$  attorno all'asse  $z$  e determinare un'equazione che definisce  $S$ .
  - (ii) Determinare i punti in cui  $S$  è regolare.
  - (iii) Determinare i punti di  $S$  dove la curvatura gaussiana è massima.
  - (iv) Determinare le linee di curvatura dove la curvatura gaussiana è massima.
  - (v) Scegliere un punto  $P \in S$  e determinare una curva su  $S$ , passante per  $P$ , con curvatura normale nulla.

- (7) Determinare se le seguenti superfici sono rigate sviluppabili

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u - v \sin u \\ \sin u + v \cos u \\ v \end{pmatrix}, \quad T(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u - v \sin u \\ \sin u + v \cos u \\ u \end{pmatrix}.$$

- (8) Discutere il segno della curvatura gaussiana nei punti della superficie della figura



- (9) Ruotare la curva  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , attorno all'asse  $z$ . Che superficie si trova?

- (10) Sanini, Esercizi Cap. VI, N. 1.1, 1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.