(1) Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t^2 \\ te^t \end{pmatrix}$.

(i) Determinare se $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ appartengono alla traiettoria di γ.

(ii) Determinare tre punti P, Q, R sulla traiettoria di γ.

(iii) Determinare se γ è una curva regolare.

(iv) Determinare la retta tangente alla curva in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(v) Determinare in quali punti il piano normale alla curva è parallelo all'asse z.

(2) Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che γ è una curva regolare.

(ii) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva parametrizzato dall'intervallo $t \in [0, \pi]$.

(iii) Determinare se γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(3) Siano γ, $\tilde{\gamma}$ le curve in $\mathbf{R}^3$ definite rispettivamente da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ e^t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{R} \qquad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \log t \\ \sin \log t \\ t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{R}^+.$$

Far vedere che γ e $\tilde{\gamma}$ sono parametrizzazioni equivalenti della stessa curva.

(4) Siano γ, $\tilde{\gamma}$ le curve in $\mathbf{R}^2$ definite rispettivamente da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \; t \in]0, 2\pi] \qquad \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, \; t \in]0, \sqrt{2\pi}].$$

Far vedere che sono due parametrizzazioni equivalenti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

(5) Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che il supporto della curva è contenuto nell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$.

(ii) Calcolare la curvatura di γ al variare di t.

(iii) Determinare il cerchio osculatore a γ nei punti di curvatura massima.

(6) Sia $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare il punto della traiettoria di γ dove la curvatura è minima.

(ii) Determinare il cerchio osculatore in quel punto.

(7) Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ t \end{pmatrix}$.

(i) Determinare se γ è una curva piana.
(ii) Calcolare la curvatura di γ al variare di t.

(8) Sia $\gamma\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ (1+t)/t \\ (1-t^2)/t \end{pmatrix}$.
(i) Verificare che γ è una curva piana.

(9) Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ una curva polinomiale di grado due
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \\ a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \end{pmatrix}.$$
(i) Far vedere che γ è una curva piana, ossia è contenuta in un piano di $\mathbf{R}^3$.
(ii) Determinare il piano che contiene la curva
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ t-t^2 \\ 1-t-2t^2 \end{pmatrix}.$$

(10) Sia $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.
(i) Verificare che γ non è piana, ossia non è contenuta in nessun piano di $\mathbf{R}^3$.
(ii) Determinare il cerchio osculatore alla curva nel punto $\gamma(1)$.
(iii) Calcolare la curvatura di γ al variare di t.
(iv) Calcolare la torsione di γ al variare di t.

(11) Sanini, Esercizi Cap. VI, N. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.1 e 1.5.2, 1.6, 1.7.

(12) Verificare che lunghezza d'arco, curvatura e torsione di una curva parametrizzata (purché definiti) sono invarianti rispetto alle trasformazioni rigide.

(13) Siano P, Q, R, S quattro punti distinti in $\mathbf{R}^3$.
(i) Dimostrare che esiste un'unica una curva polinomiale di grado tre $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 \\ a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 \\ a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3 \end{pmatrix}$$
che passa per P, Q, R, S, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = t_1, t_2, t_3, t_4$.
(ii) Determinare la cubica passante per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = -1, 0, 1, 2$.

(14) Siano P, Q due punti distinti in $\mathbf{R}^3$ e siano U, V due vettori in $\mathbf{R}^3$.
(i) Dimostrare che esiste un'unica una curva polinomiale di grado tre $\gamma\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ che passa per P e Q con vettori tangenti rispettivamente uguali a U e V, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = t_1, t_2$.
(ii) Determinare la cubica passante per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per valori del parametro dati rispettivamente da $t = t_1, t_2$ e con tangente uguale a $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.