1. Dato il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, completarlo ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente.

2. Determinare una base ortonormale del piano $x - z = 0$ in $\mathbf{R}^3$.

3. Sia dato il piano $\pi: \quad x - y + z = 0$ in $\mathbf{R}^3$. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ su $\pi$.

4. Sia dato il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ $\quad U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0\}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare $U^\perp$.
   (ii) Calcolare $\|P\|, \quad \pi_U(P), \quad \pi_{U^\perp}(P), \quad \pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P), \quad d(P,U)$.

5. Siano dati i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il piano $\quad \alpha: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ x - w = 0 \end{cases} \right\}$ in $\mathbf{R}^4$.
   (i) Calcolare $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{w}\|$, e il coseno dell'angolo fra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
   (ii) Determinare una base del complemento ortogonale $\alpha^\perp$ di $\alpha$ in $\mathbf{R}^4$.
   (iii) Calcolare la distanza $d(\mathbf{v}, \alpha)$ del vettore $\mathbf{v}$ dal piano $\alpha$.

6. Sia $L_M: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione lineare data da $X \mapsto MX$, dove $M$ è una matrice ortogonale $n \times n$. Sia $U \subset \mathbf{R}^n$ un sottospazio e sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale.
   (i) Far vedere che se $L_M(U) = U$, allora anche $L_M(U^\perp) = U^\perp$.
   (ii) Dare un'interpretazione geometrica nel caso di una matrice $M$ ortogonale $3 \times 3$ con un autovalore $\lambda = 1$ e autospazio $V_1$ di dimensione 1.
   (iii) Dare un'interpretazione geometrica nel caso di una matrice $M$ ortogonale $3 \times 3$ con un autovalore $\lambda = 1$ e autospazio $V_1$ di dimensione 2.

7. Sia $R_{\theta,P}$ rotazione di $\mathbf{R}^2$ di un angolo $\theta = \pi/2$ intorno al punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare la formula generale di $R_{\theta,P}$.
   (ii) Determinare le immagini tramite $R_{\theta,P}$ dei punti $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (iii) Determinare l'immagine tramite $R_{\theta,P}$ della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.

8. Sia $l$ la retta di $\mathbf{R}^2$ di equazione $\; X + 2Y = 1$.
   (i) Scrivere la formula generale della riflessione $R_l$ rispetto alla retta $l$.
   (ii) Calcolare $R_l(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $R_l(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$, $R_l(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$.
   (iii) Calcolare l'immagine tramite $R_l$ della retta $2X - Y = 0$.
   (iv) Calcolare l'immagine tramite $R_l$ della retta $X - 3Y = 0$.

9. Sia data $\quad F: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che $F$ è un'isometria di $\mathbf{R}^2$.
   (ii) Determinare i punti fissi di $F$.
   (iii) Dare un'interpretazione geometrica di $F$.

10. Scrivere la formula generale della rotazione $R_{\theta,\mathbf{v}}$ di $\mathbf{R}^3$ di un angolo $\theta = -\pi/2$ intorno al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. Sia $\pi$ il piano di equazione $X - 2Y = 0$ in $\mathbf{R}^3$.
    (i) Scrivere la formula generale della riflessione $S_\pi$ rispetto a $\pi$.
    (ii) Calcolare $S_\pi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$, $S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
    (iii) Calcolare l'immagine tramite $S_\pi$ del piano $Y = 0$.

12. Sia data la trasformazione $L\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
    (i) Verificare che $L$ è un'isometria di $\mathbf{R}^3$.
    (ii) Determinare autovalori e autospazi di $L$.
    (iii) Dare un'interpretazione geometrica di $L$.

13. Sia $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ e sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, definita da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

    (i) Far vedere che $M$ è una matrice ortogonale.
    (ii) Determinare i punti fissi di $F$.
    (iii) Dare un'interpretazione geometrica di $F$.

14. Con il metodo dei minimi quadrati, determinare una "soluzione approssimativa" (è unica?) del sistema lineare

$$AX = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

15. Siano dati i punti del piano

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \in \mathbf{R}^2.$$

    (i) Determinare la retta $y = kx$ che li approssima meglio.
    (ii) Determinare la parabola $y = a + bx + cx^2$ che li approssima meglio.