(1) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(2) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A.

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad X \mapsto AX$.

(3) Sia A la matrice 3×3 data da

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che A è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di A.

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad X \mapsto AX$.

(4) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(ii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione R_{π} intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(iii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(iv) Quali sono i vertici di C dopo la dilatazione $D_{1,3,2}$?

(v) Quali sono i vertici di C dopo l'omotetia D_3?

(vi) Quali sono i vertici di C dopo lo shear $N_{1,0.3}$?

(5) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_3$.
(ii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_1$.
(iii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $-\mathbf{e}_1$.
(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?
(v) Disegnare l'immagine di C dopo la dilatazione $D_{1,3,2}$?
(vi) Disegnare l'immagine di C dopo l'omotetia D_3?
(vii) Disegnare l'immagine di C dopo lo shear $N_{1,0.3}$?

(6) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di un angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.
(ii) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ intorno a $\mathbf{v}$.
(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a l.
(iv) Sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a π.

(7) Sia π il piano di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π.
(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(8) Sia C il cubo dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto
(i) al piano (x_1, x_2).
(ii) al piano (x_2, x_3).
(iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

(9) Sia C il cubo dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto
(i) al piano (x_1, x_2).
(ii) al piano (x_2, x_3).
(iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.
(iv) Trovare tutte le riflessioni S_π che mandano C in se stesso.

(10) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare la formula per la riflessione $U_\mathbf{p}$ rispetto al punto $\mathbf{p}$.
(ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_\mathbf{q}$ rispetto al punto $\mathbf{q}$.
(iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ e per $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$.
(iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{q}$ e $U_\mathbf{q} \circ U_\mathbf{p}$?

(11) Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia π' il piano di equazione $x_3 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S_π rispetto a π.

(ii) Calcolare le formule della riflessione $S_{\pi'}$ rispetto a π'.

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

(12) Sia $D_{2,5,3}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{\lambda,\mu,\rho} \circ D_{2,5,3}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda,\mu,\rho}$ sia l'applicazione identica.

(13) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se $\lambda = \mu = \rho$.

(14) Determinare l'inversa della trasformazione (shear) $N_{1,1,1}$.