

- (1) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
- (i) Trovare le formule per la traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .
  - (ii) Calcolare  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
  - (iii) Calcolare  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
  - (iv) Calcolare  $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

- (2) Sia  $Q$  il trapezio in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la traslazione  $T_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ .
  - (ii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione  $S_0$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
  - (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
  - (iv) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la dilatazione  $D_{4,3}$ .
  - (v) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo l'omotetia  $D_{1/2}$ .
  - (vi) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo lo shear  $N_1$ .
- (3) Sia  $Q$  il quadrato in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$ .
  - (ii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$ .
  - (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{3\pi/2}$ .
  - (iv) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la dilatazione  $D_{2,3}$ .
  - (v) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo l'omotetia  $D_2$ .
  - (vi) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo lo shear  $N_{-1}$ .
- (4) Sia  $Q$  il quadrato in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$ .
  - (ii) Per quali angoli  $\varphi$  la rotazione  $R_{\varphi}$  manda il quadrato in se stesso?
  - (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/4}$ .
  - (iv) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la dilatazione  $D_{2,1}$ .
  - (v) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo l'omotetia  $D_3$ .
  - (vi) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo lo shear  $N_3$ .
- (5) Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  i punti di  $\mathbf{R}^2$  di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (i) Per quali angoli  $\varphi$  la rotazione  $R_{\varphi}$  manda l'esagono di vertici  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  in se stesso?

(6) Sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare le formule per la rotazione  $R$  di centro  $\mathbf{p}$  ed angolo  $\pi/2$ .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione  $R'$  di centro  $\mathbf{p}$  ed angolo  $-\pi/4$ .
- (iii) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R$  ad  $l$ .

- (iv) Sia  $m$  la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R'$  ad  $l$ .

- (7) Sia  $l$  la retta di equazione  $x_1 + x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad  $l$ .
- (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (8) Sia  $Q$  il quadrato dell'Eserc.3. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione  $x_1 = x_2$ .

- (9) Sia  $Q$  il quadrato dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione  $x_1 = x_2$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\varphi$  che mandano  $Q$  in se stesso.

- (10) Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  i punti dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici  $Q_i$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) la retta di equazione  $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\varphi$  che mandano l'esagono in se stesso.

- (11) Sia  $S$  la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione cartesiana  $3x_1 + 4x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare la tangente dell'angolo  $\varphi$  formato da  $l$  con l'asse delle ascisse.
- (ii) Calcolare le formule per  $S$ .

- (12) Sia  $S$  la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione cartesiana  $3x_1 + 4x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione  $S_0$  rispetto all'asse delle ascisse.
- (ii) Vedere se

$$S = R_{-\varphi} \circ S_0 \circ R_\varphi.$$

(Suggerimento: calcolare le formule per  $R_\varphi$  e per  $S$ ).

- (13) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia  $m$  la retta di equazione  $x_1 = 0$ .

- (i) Trovare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad  $l$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S'$  rispetto ad  $m$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

- (iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

- (v) Geometricamente, che cosa fanno  $S \circ S'$  e  $S' \circ S$ ?

- (14) Sia  $l$  la retta di equazione  $x_1 = 1$  e sia  $m$  la retta di equazione  $x_2 = 2$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad  $l$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S'$  rispetto ad  $m$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

- (iv) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

- (v) Geometricamente, che cosa fanno  $S \circ S'$  e  $S' \circ S$ ?

- (15) Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Interpretare geometricamente il risultato.

- (16) Calcolare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbf{R}, \varphi \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Interpretare geometricamente il risultato. Cosa succede per  $\varphi = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ?

- (17) Sia  $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ . Interpretare geometricamente l'isometria  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ .

- (18) Sia  $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ . Interpretare geometricamente l'isometria  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ .

- (19) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare l'orientazione di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
- (ii) Calcolare l'orientazione di  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$ .
- (iii) Sia  $S_0$  la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare  $\text{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$ .
- (iv) Sia  $S_\varphi$  la riflessione rispetto alla retta passante per  $\mathbf{0}$  e formante un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse. Calcolare  $\text{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$ .

- (20) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Sia  $R_{\pi/2}$  la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\pi/2$ . Calcolare  $\text{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$ .
- (ii) Sia  $R_\varphi$  la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\varphi$ . Calcolare  $\text{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$ .

- (21) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Siano  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(t)}$  le riflessioni rispetto a delle rette passanti per  $\mathbf{0}$ . Sia  $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \dots \circ S^{(t)}$ . Calcolare l'orientazione  $\text{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$ .
- (22) Sia  $D_{2,5}$  la dilatazione data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .
- (i) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  tale che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$  sia l'applicazione identica.
  - (ii) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  tale che  $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$  sia l'applicazione identica.
- (23) Per quali dilatazioni  $D_{\lambda,\mu}$  abbiamo che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$  è l'applicazione identica?
- (24) Dimostrare che una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  conserva le direzioni delle rette se e solo se  $\lambda = \mu$ .
- (25) Calcolare l'inversa della trasformazione (shear)  $N_5$ .