

1. Siano dati i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

- (i) Far vedere che formano una base di \mathbf{R}^3 .
- (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
- (iii) Calcolare le coordinate del vettore $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base ortonormale così ottenuta.

2. Ortonormalizzare i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4.$$

Spiegare il risultato.

3. Dati i vettori

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix},$$

calcolare e confrontare $X \cdot Y$, $\|X\|^2$, $\|Y\|^2$, e $\|X + Y\|^2$. Spiegare il risultato.

4. Sia dato il piano $\pi \quad x + y - z = 0$ in \mathbf{R}^3 . Siano $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Determinare una base ortonormale di π .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale di P su π .
- (iii) Determinare la proiezione ortogonale su π della retta per P e Q .

5. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Descrivere l'insieme

$$\{X \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot P = 0\}.$$

6. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Descrivere l'insieme

$$\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X \cdot P = 0\}.$$

7. Sia data la retta $r \quad x - 3y = 0$ in \mathbf{R}^2 . Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Determinare il complemento ortogonale r^\perp .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
- (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

8. Sia dato il piano $\alpha \quad x + y - z = 0$ in \mathbf{R}^3 . Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (i) Determinare il complemento ortogonale α^\perp .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_\alpha(P)$.
- (iii) Determinare la distanza $d(P, \alpha^\perp)$.

9. Sia data la retta $r \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ in \mathbf{R}^3 . Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (i) Determinare il complemento ortogonale r^\perp .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
- (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

10. Sia

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^4.$$

- (i) Determinare il complemento ortogonale U^\perp .
- (ii) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_U(P)$ e $\pi_{U^\perp}(P)$ di P su U e U^\perp rispettivamente.
- (iii) Calcolare $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P)$.

(iv) Calcolare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da U e da U^\perp .

11. Controllare se i vettori

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale di \mathbf{R}^3 .

12. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di \mathbf{R}^3 il cui primo vettore sia $P/||P||$. In quanti modi si puo' fare?

13. Sia M una matrice $n \times n$ le cui colonne sono un insieme di vettori ortonormali. Spiegare perché M è invertibile.

14. Sia U un sottospazio di \mathbf{R}^n e sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base ortogonale di U . Sia U^\perp il suo complemento ortogonale e sia $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ una base ortogonale di U^\perp .

- (i) Far vedere che $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ è un insieme di vettori ortogonali.
- (ii) Far vedere che sono una base di \mathbf{R}^n .