(1.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x}$, $2\mathbf{x}$, $-\mathbf{x}$, $0\mathbf{x}$.

(ii) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $3\mathbf{y}$, $-\mathbf{x}$ e $3\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

(iii) Calcolare $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

(1.B) (*Trigonometria elementare*) Sia $\varphi \in \mathbf{R}$ un angolo. Il *seno* ed il *coseno* di φ sono, per definizione, le coordinate del vettore $\mathbf{x}$ di norma $\|\mathbf{x}\| = 1$, che forma un angolo φ con l'asse delle ascisse positive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che $|\operatorname{sen}\varphi| \leq 1$ e $|\cos\varphi| \leq 1$.

(ii) Dimostrare che $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$.

(1.C) (*La regola del coseno*) Sia ABC un triangolo con lati di lunghezza a, b c ed angoli α, β e γ. Sia Q la proiezione ortogonale di C sul lato AB.

(i) Far vedere che $|CQ| = b\operatorname{sen}\alpha$ e $|AQ| = b\cos\alpha$.

(ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo CQB e dedurre la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

(1.D) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(ii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-\mathbf{y}$.

(iii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-2\mathbf{y}$.

(1.E) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ tale che l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sia uguale a $\pi/3$.

(1.F) Trovare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ non nulli tali che

(i) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

(ii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = 0$.

(iii) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$.

(1.G) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\mathbf{p}$ il vettore

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)/2 \\ (x_2+y_2)/2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|$ di $\mathbf{p}$ da $\mathbf{x}$ e la distanza $\|\mathbf{y}-\mathbf{p}\|$ di $\mathbf{p}$ da $\mathbf{y}$.

(ii) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Far vedere che

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{p}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

(iii) Dedurre che $\mathbf{p}$ è il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(1.H) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \operatorname{sen}\psi \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$.

(ii) Dimostrare che

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi.$$

(1.I) Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ un vettore non nullo. Dimostrare che $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ è un vettore di norma 1.

(2.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Calcolare $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$ e $-2\mathbf{x}+\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.

(2.B) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i vettori dell'Eserc.2.A.
(i) Calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ e anche $\mathbf{x}\cdot(5\mathbf{x}+7\mathbf{y})$.
(ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.

(2.C) Sia $\mathbf{x}$ il vettore dell'Eserc.2.A.
(i) Trovare un vettore $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0$.
(ii) Trovare un vettore $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ tale che

$$\begin{cases}\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} & =0,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} & =0.\end{cases}$$

(2.D) Sia $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $\lambda=\|\mathbf{v}\|$.
(i) Calcolare la lunghezza di $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.
(ii) Trovare un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ che abbia lunghezza $1/\lambda$.

(2.E) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$. Sia

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}(x_1+y_1)/2\\(x_2+y_2)/2\\(x_3+y_3)/2\end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le distanze $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|$.
(ii) Far vedere che $\mathbf{v}$ è il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(2.F) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i due vettori dell'Eserc.2.A.
(i) Calcolare $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare $\mathbf{x}\times(-\mathbf{y})$.
(iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(2.G) Siano $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.
(i) Trovare un vettore $\mathbf{v}$ perpendicolare sia a $\mathbf{x}$ che a $\mathbf{y}$.
(ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.

(2.H) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori in $\mathbf{R}^3$ dati da

$$\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le lunghezze di $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ e i coseni degli angoli fra $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(2.I) Siano $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ e $\mathbf{z}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
(i) Calcolare i vettori $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$ ed $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$.
(ii) Calcolare $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}$ ed $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$.