1. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matrice reale simmetrica 2×2.
   (i) Dimostrare che il polinomio caratteristico di A è uguale a $X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$.
   (ii) Dimostrare che gli autovalori di A sono reali.
   (iii) Dimostrare che esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A.

Sol. (i) Calcoliamo

$$\det \begin{pmatrix} a - X & b \\ b & c - X \end{pmatrix} = (c - X)(a - X) - b^2 = X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$$

(ii) Il discriminante dell'equazione degli autovalori di A è

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + b^2 \geq 0$$

(iii) Dal punto (ii) sappiamo che la matrice A ammette due autovalori reali λ_1 e λ_2, non necessariamnet distinti. Indichiamo con $\mathbf{f}_1$ un λ_1-autovettore di A. Sia $\mathbf{f}_2$ un vettore non nullo ortogonale a $\mathbf{f}_1$. Poiché A è simmetrica, anche $A\mathbf{f}_2$ è ortogonale ad $\mathbf{f}_1$. Infatti

$$(A\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 \cdot (A\mathbf{f}_1) = \lambda_1(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1) = 0$$

Dunque $A\mathbf{f}_2 = \mu\mathbf{f}_2$ per qualche numero reale μ. Ne segue che anche $\mathbf{f}_2$ è un autovettore di A (e in particolare $\mu = \lambda_2$). La base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ è una base ortogonale di autovettori. Normalizzandola se ne ricava un abase ortonormale di autovettori.

2. Fare un disegno delle seguenti coniche:
   (i) $X^2 + 2Y^2 = 5$.
   (ii) $XY = 4$.
   (iii) $X^2 - 4X + Y^2 - 6Y = 3$.

Sol. (i) Si tratta di un'ellisse centrata nell'origine e con gli assi coincidenti con gli assi cartesiani. Il semiasse orizzontale ha norma $\sqrt{5}$, mentre il semiasse verticale ha norma $\sqrt{5/2}$.
(ii) Si tratta di un'iperbole i cui assi coincidono con le rette $X = Y$ e $X = -Y$. Gli asintoti dell'iperbole coincidono con gli assi cartesiani. Inoltre i due rami dell'iperbole sono contenuti nel primo ($X \geq 0, Y \geq 0$) e nel terzo ($X \leq 0, Y \leq 0$) quadrante.
(iii) Riscrivendo l'equazione come $(X-2)^2 + (Y-3)^2 = 16$ si riconosce la circonferenza di raggio 4 e centro nel punto $(2, 3)$.

3. Fare un disegno delle seguenti coniche:
   (i) $X^2 + 2Y^2 = 0$.
   (ii) $XY - 2X + Y = 2$.
   (iii) $X^2 - 4X - Y^2 - 6Y + 13 = 0$.

Sol. (i) La conica consiste nel solo punto $(0, 0)$.
(ii) Riscrivendo l'equazione come $(X+1)(Y-2) = 0$ è immediato osservare che la conica data è l'unione delle due rette $X = -1$ e $Y = 2$.
(iii) Riscrivendo l'equazione come $(X-2)^2 - (Y+3)^2 = -18$ si vede che la conica data è un'iperbole con centro nel punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e gli asintoti paralleli alle rette $X = Y$ e $X = -Y$.

4. Fare un disegno delle seguenti ellissi. Indicarne centro e assi di simmetria.
   (i) $X^2 + 4Y^2 = 5$
   (ii) $X^2 + XY + Y^2 = 3$.
   (iii) $2X^2 + 4XY + 5Y^2 + 4X + 13Y - 1/4 = 0$.

Sol. (i) Il centro è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli assi coincidono con gli assi cartesiani.

(ii) Il centro è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli assi sono le rette $X = Y$ e $X = -Y$. (iii) Il centro è il punto $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$. Gli assi sono date dalle rette $2X - Y - 5/2 = 0$ e $X + 2Y + 5/2 = 0$.

5. Fare un disegno delle seguenti iperboli. Indicarne gli asintoti.
   (i) $XY = -4$
   (ii) $X^2 - 7Y^2 = 7$.
   (iii) $X^2 + XY - 2Y^2 - 2X - 2Y = 0$.

Sol. (i) Il centro è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani.

(ii) Il centro è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli asintoti sono le rette $X = \sqrt{7}Y$ e $X = -\sqrt{7}Y$.

(iii) Il centro è il punto $\begin{pmatrix} 10/9 \\ -2/9 \end{pmatrix}$. Gli asintoti sono le rette $X - Y - 4/3 = 0$ e $X + 2Y - 2/3 = 0$.

6. Fare un disegno delle seguenti coniche.
   (i) $X^2 + Y^2 + 2X + 2Y + 1 = 0$
   (ii) $X^2 - Y^2 - 2X + 1 = 0$.
   (iii) $Y^2 + 2X + 2Y + 2 = 0$.
   (iv) $X^2 + Y = 4X - 4$.
   (v) $3X^2 - 2XY + 3Y^2 - 10X + 6Y + 8 = 0$.
   (vi) $X^2 + 2XY + Y^2 - 4X + 5 = 0$.

Sol. (i) Riscrivendo l'equazione come $(X+1)^2 + (Y+1)^2 = 1$ si riconosce che la conica data è la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e raggio 1.

(ii) Riscrivendo l'equazione come $(X-1)^2 - Y^2 = 0$ si riconosce che la conica data è l'unione delle due rette $X - Y - 1 = 0$ e $X + Y - 1 = 0$.

(iii) Riscrivendo l'equazione come $(X + 1/2) = -\frac{1}{2}(Y + 1)^2$ si riconosce che la conica data è una parabola con asse $Y = -1$ e vertice $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La concavità della parabola è rivolta verso sinistra.

(iv) Riscrivendo l'equazione come $Y = -(X-2)^2$ si riconosce che la conica data è una parabola con asse $X = 2$ e vertice $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La concavità della parabola è rivolta verso il basso.

(v) Ponendo $X = X' + 3/2$ e $Y = Y' - 1/2$ l'equazione della conica diventa $3(X')^2 - 2X'Y' + 3(Y')^2 = 1$. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ è

$$\begin{pmatrix} 1\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Se poniamo $X' = \frac{1}{\sqrt{2}}X'' - \frac{1}{\sqrt{2}}Y''$ e $Y' = \frac{1}{\sqrt{2}}X'' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y''$, l'equazione della conica diventa

$$2(X'')^2 + 4(Y'')^2 = 1$$

Riconosciamo coì che si tratta di una ellisse. Più precisamente la conica data è un'ellisse di centro $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e i cui assi hanno equazione $X + Y - 1 = 0$ e $X - Y - 2 = 0$.

(vi) La matrice della forma quadratica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha determinante uguale a zero: è una parabola oppure una retta doppia (in particolare non ha centro). Una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è

$$\begin{pmatrix} 1\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Se poniamo $X = \frac{1}{\sqrt{2}}X' - \frac{1}{\sqrt{2}}Y'$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}X' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y'$, l'equazione della conica diventa

$$2(X')^2 - 2\sqrt{2}X' + 2\sqrt{2}Y' + 5 = 0$$

ovvero

$$Y' + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(X' - \sqrt{2}/2)^2$$

Riconosciamo così la parabola di asse $X' = \sqrt{2}/2$ e vertice $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Poiché $X' = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y$, in termini delle coordinate X, Y, l'asse della parabola ha equazione $X + Y = 1$. Inoltre da $X = \frac{1}{\sqrt{2}}X' - \frac{1}{\sqrt{2}}Y'$ e $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}X' + \frac{1}{\sqrt{2}}Y'$ segue che il vertice della parabola ha coordinate $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. La concavità della parabola è rivolta verso il basso a destra.

7. Sia C la conica data dall'equazione $Y^2 = X$.
   (i) Determinare l'equazione della conica dopo la traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia C' la conica traslata. Far vedere che il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a C'.
   (ii) Determinare l'equazione della conica C' dopo una rotazione di 60 gradi intorno all'origine. Far vedere che l'immagine del punto P è $\begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 + 1 \end{pmatrix}$.

Sol. (i) L'equazione della conica C' è $(Y-2)^2 = (X-1)$, ovvero

$$Y^2 - X - 4Y + 5 = 0$$

E' immediato verificare che il punto P appartiene alla conica C'.

(ii) L'equazione della conica C'' ottenuta ruotando C' di 60 gradi attorno all'origine è $(-\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y)^2 - (\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y) - 4(-\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y) + 5 = 0$, ovvero

$$\frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}XY + \frac{4\sqrt{3}-1}{2}X - \frac{4+\sqrt{3}}{2}Y + 5 = 0$$

L'immagine del punto P mediante la rotazione di 60 gradi attorno all'origine è il punto

$$P'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 + 1 \end{pmatrix}$$

E' immediato verificare che il punto P'' appartiene alla conica C''.

8. Sia C la conica data dall'equazione $X^2 - 2Y^2 = 0$. Disegnare C.
   (i) Determinare l'equazione della conica dopo la traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sol. La conica data è l'unione delle due rette $X - \sqrt{2}Y = 0$ e $X + \sqrt{2}Y = 0$.
(i) L'equazione della conica traslata è $(X-1)^2 - 2(Y-2)^2 = 0$, ovvero $X^2 - 2Y^2 - 2X + 8Y - 7 = 0$.

9. Sia C la conica data dall'equazione $Y^2 = 3XY$. Disegnare C.
   (i) Determinare l'equazione della conica dopo una rotazione di 45 gradi intorno all'origine.

Sol. La conica data è l'unione delle due rette $Y = 0$ e $Y = 3X$.
(i) L'equazione della conica ruotata è $(-\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y)^2 - 3(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y)(-\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y) = 0$, ovvero

$$2X^2 - Y^2 - XY = 0$$

10. (i) Far vedere che i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ appartengono all'iperbole data da $Y^2 - 7X^2 = 1$. Trovare altri punti sull'iperbole con coordinate intere.

(ii) Trovare punti $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ con coordinate intere e positive sull'iperbole

$$Y^2 - 19X^2 = 1.$$

Sol. (i) Per verificare l'appartenenza dei punti dati all'iperbole basta osservare che le coordinate dei punti soddisfano l'equazione dell'iperbole. Osserviamo che, se $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ è un punto dell'iperbole allora anche $\begin{pmatrix} -X \\ Y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix}$ lo sono. Per trovare altri punti a coordinate intere, riscriviamo l'equazione dell'iperbole come $Y^2 = 1+7X^2$, facciamo variare X negli interi e prendiamo quei valori di X per cui $1+7X^2$ è un quadrato perfetto. Troviamo così (utilizzando un calcolatore) che tutte le soluzioni con $-1000000 \leq X \leq 1000000$ sono date dai punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 3 \\ \pm 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 48 \\ \pm 127 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 765 \\ \pm 2024 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 12192 \\ \pm 32257 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 194307 \\ \pm 514088 \end{pmatrix}$$

(ii) Con lo stesso programma troviamo che tutte le soluzioni con $0 \leq X \leq 1000000$ sono date dai punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 39 \\ 170 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 13260 \\ 57799 \end{pmatrix}$$