

1. Siano dati i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$

- (i) Far vedere che formano una base di  $\mathbf{R}^3$ .  
 (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.  
 (iii) Calcolare le coordinate del vettore  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$  nella base ortonormale così ottenuta.

*Sol.* (i) Usiamo il metodo dell'eliminazione gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango uguale a 3, che è la dimensione di  $\mathbf{R}^3$ : i tre vettori dati sono una base di  $\mathbf{R}^3$ .

(ii) Per prima cosa determiniamo una base ortogonale, che poi normalizzeremo. Se indichiamo con  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$  i tre vettori dati, allora

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base ortonormale cercata è pertanto

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{f}_3}{\|\mathbf{f}_3\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha

$$X = (X \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (X \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (X \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$$

dunque le coordinate di  $X$  nella base  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  sono

$$X \cdot \mathbf{e}_1 = 7/\sqrt{2}; \quad X \cdot \mathbf{e}_2 = -2/\sqrt{3}; \quad X \cdot \mathbf{e}_3 = 5/\sqrt{6}$$

2. Ortonormalizzare i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4.$$

Spiegare il risultato.

*Sol.* Se indichiamo con  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$  e  $\mathbf{b}_3$  i tre vettori dati, applicando il procedimento di Gram-Schmidt troviamo:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 - \frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ragione di questo risultato è che in realtà i tre vettori dati sono linearmente dipendenti (si vede facilmente che  $2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3$ ), e generano un sottospazio di  $\mathbf{R}^4$  di dimensione 2. Una base ortogonale per questo sottospazio è costituita dai due vettori  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$  ed una sua base ortonormale si ottiene normalizzando questa:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

3. Dati i vettori

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix},$$

calcolare e confrontare  $X \cdot Y$ ,  $\|X\|^2$ ,  $\|Y\|^2$ , e  $\|X + Y\|^2$ . Spiegare il risultato.

*Sol.*  $X \cdot Y = 0$ ,  $\|X\|^2 = 30$ ,  $\|Y\|^2 = 101$ ,  $\|X + Y\|^2 = 131$ . Si ha  $\|X\|^2 + \|Y\|^2 = \|X + Y\|^2$ , il che si spiega facilmente: poichè  $X \cdot Y = 0$ , i due vettori  $X$  e  $Y$  sono ortogonali; la regola del parallelogramma ci dice allora che  $X + Y$  può essere visto come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti  $X$  e  $Y$ ; l'identità  $\|X\|^2 + \|Y\|^2 = \|X + Y\|^2$  non è altro che il teorema di Pitagora.

4. Sia dato il piano  $\pi$   $x + y - z = 0$  in  $\mathbf{R}^3$ . Siano  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Determinare una base ortonormale di  $\pi$ .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale di  $P$  su  $\pi$ .
- (iii) Determinare la proiezione ortogonale su  $\pi$  della retta per  $P$  e  $Q$ .

*Sol.* (i) Una base di  $\pi$  è data dai due vettori

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricaviamo una base ortonormale con il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e dunque, normalizzando,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(ii) Indichiamo con  $\mathbf{v}$  la proiezione ortogonale di  $P$  su  $\pi$ . Si ha

$$\mathbf{v} = (P \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

(iii) Il generico vettore della retta per  $P$  e  $Q$  è

$$P_t = P + t(Q - P) = \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La sua proiezione su  $\pi$  è

$$\mathbf{v}_t = (P_t \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (P_t \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} (5 - 4t)/3 \\ (-1 + 2t)/3 \\ (4 - 2t)/3 \end{pmatrix}$$

5. Sia  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ . Descrivere l'insieme

$$\{X \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot P = 0\}.$$

*Sol.* Si tratta della retta di equazione cartesiana  $x_1 - x_2 = 0$ .

6. Sia  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ . Descrivere l'insieme

$$\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X \cdot P = 0\}.$$

*Sol.* Si tratta del piano di equazione cartesiana  $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

7. Sia data la retta  $r : x - 3y = 0$  in  $\mathbf{R}^2$ . Sia  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Determinare il complemento ortogonale  $r^\perp$ .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale  $\pi_r(P)$ .
- (iii) Determinare la distanza  $d(P, r^\perp)$ .

*Sol.* (i) Lo spazio  $r^\perp$  è la retta generata dal vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  (il vettore dei coefficienti dell'equazione cartesiana di  $r$ ).

(ii) Un generatore per  $r$  è il vettore  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Una base ortonormale per  $r$  si ottiene normalizzando  $\mathbf{b}$ :  $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ . La proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$  è data da

$$\pi_r(P) = (P \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 21/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$$

(iii) La distanza  $d(P, r^\perp)$  è uguale a  $\|P - \pi_{r^\perp}(P)\|$ . Una base ortonormale di  $r^\perp$  è  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ , dunque

$$\pi_{r^\perp}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1/10 \\ 3/10 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P - \pi_{r^\perp}(P) = \begin{pmatrix} 21/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d(P, r^\perp) = 7\sqrt{10}/10$$

8. Sia dato il piano  $\alpha: x + y - z = 0$  in  $\mathbf{R}^3$ . Sia  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (i) Determinare il complemento ortogonale  $\alpha^\perp$ .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale  $\pi_\alpha(P)$ .
- (iii) Determinare la distanza  $d(P, \alpha^\perp)$ .

*Sol.* (i) Lo spazio  $\alpha^\perp$  è la retta generata dal vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (il vettore dei coefficienti dell'equazione cartesiana di  $\alpha$ ).

(ii) Una base per  $\alpha$  è costituita dai due vettori  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Una base ortonormale per  $\alpha$  si ottiene ortonormalizzando  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ :

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La proiezione ortogonale di  $P$  su  $\alpha$  è data da

$$\pi_\alpha(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) La distanza  $d(P, \alpha^\perp)$  è uguale a  $\|P - \pi_{\alpha^\perp}(P)\|$ . Una base ortonormale di  $\alpha^\perp$  è  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ , dunque

$$\pi_{\alpha^\perp}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P - \pi_{\alpha^\perp}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d(P, \alpha^\perp) = \sqrt{2}$$

9. Sia data la retta  $r = \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$  in  $\mathbf{R}^3$ . Sia  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (i) Determinare il complemento ortogonale  $r^\perp$ .
- (ii) Determinare la proiezione ortogonale  $\pi_r(P)$ .
- (iii) Determinare la distanza  $d(P, r^\perp)$ .

*Sol.* (i) Lo spazio  $r^\perp$  è il piano generato dai vettori  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (i vettori dei coefficienti delle equazioni cartesiane di  $r$ ).

(ii) Una base per  $r$  è costituita dal vettore  $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Una base ortonormale per  $r$  si ottiene normalizzando

$\mathbf{b}_3$ :

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{19} \\ 1/\sqrt{19} \\ -3/\sqrt{19} \end{pmatrix};$$

La proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$  è data da

$$\pi_r(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 9/19 \\ 3/19 \\ -9/19 \end{pmatrix}$$

(iii) La distanza  $d(P, r^\perp)$  è uguale a  $\|P - \pi_{r^\perp}(P)\|$ . Una base ortonormale di  $r^\perp$  si ottiene applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ . Si ha:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque, normalizzando,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 9/\sqrt{190} \\ 3/\sqrt{190} \\ 10/\sqrt{190} \end{pmatrix}$$

dunque

$$\pi_{r^\perp}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 17/19 \\ 12/19 \\ 21/19 \end{pmatrix}$$

da cui

$$P - \pi_{r^\perp}(P) = \begin{pmatrix} 21/19 \\ 7/19 \\ -21/19 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$d(P, r^\perp) = 7\sqrt{19}/19$$

10. Sia

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbf{R}^4.$$

- (i) Determinare il complemento ortogonale  $U^\perp$ .
- (ii) Determinare le proiezioni ortogonali  $\pi_U(P)$  e  $\pi_{U^\perp}(P)$  di  $P$  su  $U$  e  $U^\perp$  rispettivamente.
- (iii) Calcolare  $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P)$ .

- (iv) Calcolare la distanza del punto  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  da  $U$  e da  $U^\perp$ .

*Sol.* (i) Affinché il vettore  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  sia un elemento di  $U^\perp$ , deve essere

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che una base di  $U^\perp$  è data dai due vettori

$$\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Determiniamo basi ortonormali di  $U$  e di  $U^\perp$  (insieme formeranno una base ortonormale di  $\mathbf{R}^4$ , vedi l'esercizio 14). Per  $u$  troviamo

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Per  $U^\perp$  troviamo

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_4 = \mathbf{b}_4 - \frac{\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{b}_4}{\mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3} \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{f}_3}{\|\mathbf{f}_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{f}_4}{\|\mathbf{f}_4\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\pi_U(P) = (P \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (P \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2$$

$$\pi_{U^\perp}(P) = (P \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 + (P \cdot \mathbf{e}_4) \mathbf{e}_4$$

pertanto, se  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ ,

$$\pi_U(P) = \begin{pmatrix} (p_1 + p_3)/2 \\ (p_2 + p_4)/2 \\ (p_1 + p_3)/2 \\ (p_2 + p_4)/2 \end{pmatrix}; \quad \pi_{U^\perp}(P) = \begin{pmatrix} (p_1 - p_3)/2 \\ (p_2 - p_4)/2 \\ (p_3 - p_1)/2 \\ (p_4 - p_2)/2 \end{pmatrix}$$

(iii) Il vettore  $\pi_U(P)$  è un elemento dello spazio  $U$ , mentre il vettore  $\pi_{U^\perp}(P)$  è un elemento dello spazio  $U^\perp$ , dunque  $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P) = 0$ .

(iv) La distanza  $d(P, U)$  è uguale a  $\|P - \pi_U(P)\|$ . Si ha

$$P - \pi_U(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui  $d(P, U) = \sqrt{2}/2$ . In modo analogo,  $d(P, U^\perp) = \|P - \pi_{U^\perp}(P)\| = \sqrt{2}/2$ .

11. Controllare se i vettori

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$ .

*Sol.* E' immediato osservare che i tre vettori hanno norma uno. Per verificare che formano una base ortonormale è dunque sufficiente mostrare che sono a due a due ortogonali. Ma l'ortogonalità è preservata dalla moltiplicazione per scalari, dunque basta controllare che i tre vettori

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

siano ortogonali, il che si verifica facilmente.

12. Sia  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Determinare una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  il cui primo vettore sia  $P/\|P\|$ . In quanti modi si può fare?

*Sol.* Indichiamo con  $\pi$  il piano ortogonale al vettore  $P$ . Completare  $P/\|P\|$  ad una base ortonormale di  $\mathbf{R}^3$  è equivalente a dare una base ortonormale di  $\pi$  (e dunque può essere fatto in tanti modi quante sono le basi ortonormali di uno spazio euclideo di dimensione due, che sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del gruppo ortogonale  $O(2)$ ). Per determinare una base ortonormale di  $\pi$  basta determinarne una base arbitraria e poi ortonormalizzarla col procedimento di Gram-Schmidt. L'equazione cartesiana di  $\pi$  è  $2x_1 + x_2 = 0$ , e dunque una sua base è costituita dai due vettori

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che questa base è già un sistema di vettori ortogonali. Per concludere l'esercizio basta normalizzarli:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13. Sia  $M$  una matrice  $n \times n$  le cui colonne sono un insieme di vettori ortonormali. Spiegare perché  $M$  è invertibile.

*Sol.* Dalla definizione di prodotto scalare in  $\mathbf{R}^n$  e dal fatto che le colonne di  $M$  sono un sistema di vettori ortonormali segue  $M^T M = \text{Id}_n$ , dove  $M^T$  indica la matrice trasposta di  $M$  e  $\text{Id}_n$  la matrice identica  $n \times n$  (verificarlo!). Ma allora  $\det(M^T M) = 1$  e, dal teorema di Binet,

$$\det M^T \cdot \det M = 1$$

da cui  $\det M \neq 0$ , ovvero  $M$  è invertibile. In particolare, poiché  $\det M^T = \det M$ , si ha  $(\det M)^2 = 1$ , da cui  $\det M = 1$  oppure  $\det M = -1$ .

14. Sia  $U$  un sottospazio di  $\mathbf{R}^n$  e sia  $\{u_1, \dots, u_k\}$  una base ortogonale di  $U$ . Sia  $U^\perp$  il suo complemento ortogonale e sia  $\{v_1, \dots, v_h\}$  una base ortogonale di  $U^\perp$ .

(i) Far vedere che  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_h\}$  è un insieme di vettori ortogonali.

(ii) Far vedere che sono una base di  $\mathbf{R}^n$ .

*Sol.* (i) L'unica cosa da verificare è che si abbia  $u_i \cdot v_j = 0$  per ogni  $i, j$ , ma questo è ovvio in quanto  $u_j \in U$  e  $v_j \in U^\perp$ .

(ii) Sappiamo che  $\mathbf{R}^n = U + U^\perp$  e che questa somma è diretta, ovvero  $U \cap U^\perp = 0$ . Da  $\mathbf{R}^n = U + U^\perp$  segue che  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_h\}$  genera tutto  $\mathbf{R}^n$ . Per mostrare che questo insieme di vettori è una base, osserviamo che dalla formula di Grassmann

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(U + U^\perp) + \dim(U \cap U^\perp)$$

segue  $k + h = n$  e dunque  $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_h\}$  è un sistema di generatori di  $\mathbf{R}^n$  avente cardinalità uguale alla dimensione di  $\mathbf{R}^n$ , cioè è una base di  $\mathbf{R}^n$ .