

Definizione. Siano l , ed m due rette in $\mathbb{P}^2$ e sia R un punto esterno ad esse. Per definizione, la *prospettività* di centro R è l'applicazione $\pi_R: l \rightarrow m$ che associa ad un punto $X \in l$ il punto di intersezione di m con la retta passante per R e per X

$$\pi_R(X) = m \cap \overline{RX}.$$

Osserviamo innanzitutto che l'applicazione π_R è biunivoca. Ricordiamo inoltre che *fissare due punti distinti $P = (p_0 : p_1 : p_2)$, $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$ su una retta r in $\mathbb{P}^2$ equivale a fissare una identificazione di r con $\mathbb{P}^1$.*

Scriviamo il piano α per l'origine in $\mathbb{R}^3$ ad essa corrispondente in forma parametrica

$$X = t \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Al variare t, s , non entrambi nulli, i punti della retta r hanno coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2$

$$(tp_0 + sq_0 : tp_1 + sq_1 : tp_2 + sq_2).$$

Poiché P e Q sono distinti in $\mathbb{P}^2$, i vettori $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ e formano una base di α . Questa base induce una identificazione di α con $\mathbb{R}^2$

$$t \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}.$$

e di α privato dell'origine con $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Applicando la proiezione canonica ad α privato dell'origine, otteniamo una identificazione di r con $\mathbb{P}^1$:

$$\pi\left(\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}\right) = (t : s).$$

Proposizione. Siano l, m due rette in $\mathbb{P}^2$ e sia $R \in \mathbb{P}^2$ un punto esterno ad esse. Fissate identificazioni di l ed m con $\mathbb{P}^1$, la *prospettività* di centro R

$$\pi_R: l \cong \mathbb{P}^1 \rightarrow m \cong \mathbb{P}^1$$

è una *trasformazione proiettiva*.

Dim. Fissata l'identificazione di l con $\mathbb{P}^1$ associata a due punti distinti P, Q , fissiamo l'identificazione di m con $\mathbb{P}^1$ associata ai punti $S = \pi_R(P)$ e $T = \pi_R(Q)$. Poiché π_R è biunivoca, anche $S = \pi_R(P)$ e $T = \pi_R(Q)$ sono punti distinti in m . Sia $X = (x_0 : x_1 : x_2)$ un punto arbitrario di $l \cong \mathbb{P}^1$, di coordinate omogenee $(\alpha : \beta)$ rispetto a P, Q . Indichiamo con $X' = (x'_0 : x'_1 : x'_2)$ il punto

$\pi_R(X) \in m \cong \mathbb{P}^1$ e siano $(\gamma : \delta)$ le coordinate omogenee di X' rispetto a S, T . Faremo vedere che, rispetto a queste coordinate, la proiezione π_R è data da

$$\pi_R(\alpha : \beta) = (-a\alpha : b\beta),$$

dove $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In altre parole, π_R è indotta da una matrice invertibile $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Se $R = (r_0 : r_1 : r_2)$ è il centro della prospettiva, i punti R, X, X' sono allineati e vale

$$\det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

Poiché per costruzione R, P, S e R, Q, T sono terne di punti allineati, vale anche

$$\det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

Sostituendo adesso nella (1)

$$X = (\alpha p_0 + \beta q_0 : \alpha p_1 + \beta q_1 : \alpha p_2 + \beta q_2) \quad \text{e} \quad X' = (\gamma s_0 + \delta t_0 : \gamma s_1 + \delta t_1 : \gamma s_2 + \delta t_2),$$

per le proprietà del determinante e le relazioni (2), troviamo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ \alpha p_0 + \beta q_0 & \alpha p_1 + \beta q_1 & \alpha p_2 + \beta q_2 \\ \gamma s_0 + \delta t_0 & \gamma s_1 + \delta t_1 & \gamma s_2 + \delta t_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \delta \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} + \beta \gamma \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Definiamo

$$a = \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix}, \quad b = \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \end{pmatrix}.$$

Poiché i punti delle terne R, P, T e R, Q, S non sono allineati, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. La (3) diventa

$$\frac{\alpha}{\beta} a = -\frac{\gamma}{\delta} b \quad \Leftrightarrow \quad (\gamma : \delta) = (-a\alpha : b\beta)$$

come richiesto.

Proposizione. Siano l, m due rette in $\mathbb{P}^2$ e sia $S = l \cap m$ il loro punto di intersezione. Una proiezione $f: l \rightarrow m$ è una prospettiva se e solo se $f(S) = S$.

Dim. Osserviamo innanzitutto che date due rette in $\mathbb{P}^2$, una qualunque prospettiva $\pi_R: l \rightarrow m$ fissa il punto di intersezione $S = l \cap m$. Dimostriamo che vale il viceversa: una proiezione $f: l \rightarrow m$ che fissa il punto di intersezione $S = l \cap m$ è una prospettiva. Siano P, Q punti distinti su l e siano anche distinti da S . Poiché f è biunivoca, $f(P)$ ed $f(Q)$ sono punti distinti su m e sono anche distinti da S . Sia r_1 la retta passante per P ed $f(P)$ e sia r_2 la retta passante per Q ed $f(Q)$. Le rette r_1 ed r_2 sono distinte e si intersecano in un punto R . Per costruzione,

$$f(P) = \pi_R(P) \quad \text{e} \quad f(Q) = \pi_R(Q), \quad f(S) = \pi_R(S).$$

Poiché due trasformazioni proiettive della retta proiettiva che coincidono su tre punti distinti coincidono dappertutto, si ha che $f = \pi_R$ come richiesto.