Proiettività di $\mathbb{P}^1$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice reale *invertibile* 2×2 e sia

$$L_A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$$

la corrispondente trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$.

Poiché L_A è lineare e biiettiva, manda rette per l'origine in rette per l'origine:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\},\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad L_A(tX) = tL_A(X), \quad L_A(X) \neq O.$$

Di conseguenza, L_A induce una trasformazione dell'insieme delle direzioni delle rette del piano passanti per l'origine

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Definizione. Una *proiettività* (o *trasformazione proiettiva*) $F\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è l'applicazione indotta da una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *invertibile* 2×2, secondo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$, in coordinate omogenee F è data da

$$F((x_0 : x_1)) = \pi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1).$$

• Verifichiamo che F è ben definita:
ricordiamo che le coordinate omogenee non sono uniche, nel senso che per ogni $t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$, le scritture $(tx_0 : tx_1)$ individuano lo stesso punto $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$. Il fatto che per ogni $t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$

$$F(tx_0 : tx_1) = (atx_0 + btx_1 : ctx_0 + dtx_1) = (t(ax_0 + bx_1) : t(cx_0 + dx_1)) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$$

ci assicura che l'immagine del punto $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ non dipende dalle particolari coordinate omogenee scelte per rappresentarlo.

Esempio. Sia data la matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. La proiettività indotta da A è data dalla formula

$$F(x_0 : x_1) = (x_0 + 2x_1 : 3x_0 + x_1).$$

Le immagini dei punti $P = (1 : 0)$, $Q = (1 : 1)$, $R = (0 : 1)$ sono date rispettivamente da $F(P) = (1 : 3)$, $F(Q) = (3 : 4)$, $F(R) = (2 : 1)$. Se ad esempio scriviamo $P = (2 : 0)$, troviamo $F(P) = (2 : 6) = (1 : 3)$. In altre parole, l'immagine $F(P)$ non cambia a seconda di quali coordinate omogenee scegliamo per P.

• Osserviamo inoltre che se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile, allora tutte le matrici della forma

$$\{\alpha A\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{$*$}$$

sono invertibili ed inducono la stessa trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^1$: per ogni $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

$$F((x_0 : x_1)) = (ax_0+bx_1 : cx_0+dx_1) = (\alpha ax_0+\alpha bx_1 : \alpha cx_0+\alpha dx_1) = (\alpha(ax_0+bx_1) : \alpha(cx_0+dx_1)).$$

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. La proiettività indotta $F\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è data da

$$F((x_0 : x_1)) = (x_0 + x_1 : 3x_0 + 2x_1).$$

La proiettività indotta ad esempio dalla matrice $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ coincide con F: per ogni $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ si ha infatti

$$(2x_0 + 2x_1 : 6x_0 + 4x_1) = (2(x_0 + x_1) : (3x_0 + 2x_1)) = (x_0 + x_1 : 3x_0 + 2x_1) = F(x_0 : x_1).$$

Osservazione. È anche chiaro dalla definizione che una trasformazione proiettiva è un'applicazione biiettiva di $\mathbb{P}^1$ in sè. Inoltre la composizione di trasformazioni proiettive è una trasformazione proiettiva e che l'inversa di una trasformazione proiettiva è una trasformazione proiettiva.

Teorema. *Date due terne di punti distinti* $P,\ Q,\ R$ *e* $P',\ Q',\ R'$ *in* $\mathbb{P}^1$*, esiste un'unica trasformazione proiettiva* $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *tale che* $f(P) = P',\ f(Q) = Q',\ f(R) = R'$.

Dim. Cominciamo col dimostrare che data una terna di punti distinti $P = (p_0 : p_1)$, $Q = (q_0 : q_1)$, $R = (r_0 : r_1)$ in $\mathbb{P}^1$, esiste un'unica trasformazione proiettiva che manda i punti $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$ rispettivamente in P, Q, R. Dobbiamo far vedere che esiste una matrice invertibile 2×2 che manda

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente in

$$t\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad s\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix},$$

per qualche $t, s, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{O\}$. Consideriamo le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix}$$

al variare di $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per ogni valore di $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la matrice $\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix}$ è invertibile: la condizione $P \neq Q$ implica infatti

$$\det \begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix} = st \det \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Inoltre, tale matrice induce una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^1$ che manda $(1:0)$ in P e $(0:1)$ in Q. Resta da far vedere che esistono $t, s, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Questo equivale a richiedere che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} tp_0 + sq_0 - \lambda r_0 = 0 \\ tp_1 + sq_1 - \lambda r_1 = 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione (t, s, λ), con $t, s, \lambda \neq 0$. Ciò è garantito dal fatto che P, Q, R sono punti distinti in $\mathbb{P}^1$, ossia

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

non sono collineari. A questo punto (dividendo tutto per $\lambda \neq 0$), l'equazione (**) è equivalente alla

$$\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } t, s \neq 0. \qquad (***)$$

Poiché $P \neq Q$, *esistono unici* t_0, s_0 che soddisfano (***). La matrice corrispondente

$$A = \begin{pmatrix} t_0p_0 & s_0q_0 \\ t_0p_1 & s_0q_1 \end{pmatrix}$$

induce una trasformazione proiettiva che soddisfa le condizioni richieste: manda i punti $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P, Q, R. Osserviamo infine che tutte e sole le matrici che soddisfano (**) sono della forma αA, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tutte queste matrici inducono la stessa trasformazione di $\mathbb{P}^1$, e da ciò segue l'*unicità*.

Se F è la trasformazione proiettiva che manda $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P, Q, R e G è la trasformazione proiettiva che manda $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P', Q', R', allora F^{-1} è la trasformazione proiettiva che manda P, Q, R rispettivamente in $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ e

$$f = G \circ F^{-1}$$

è la trasformazione cercata che manda P, Q, R rispettivamente in P', Q', R'.

Esercizio. Seguendo la dimostrazione del teorema precedente, determinare le proiettività che mandano P, Q, R rispettivamente in P', Q', R', dove

(a) $P = (1:0)$, $Q = (0:1)$, $R = (1:1)$ e $P' = (1:1)$, $Q' = (-1:4)$, $R' = (0:6)$.

(b) $P = (1:0)$, $Q = (0:1)$, $R = (1:1)$ e $P' = (3:1)$, $Q' = (2:5)$, $R' = (0:3)$.

(c) $P = (1:2)$, $Q = (1:4)$, $R = (2:3)$ e $P' = (1:1)$, $Q' = (2:4)$, $R' = (5:6)$.

Osservazione. Dal teorema segue che una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^1$ è completamente determinata dall'immagine di tre punti distinti. Ciò equivale a dire che due proiettività che coincidono su tre punti distinti, coincidono ovunque. Questo fatto verrà usato ripetutamente in seguito.

Proiettività di $\mathbb{P}^2$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix}$ una matrice reale *invertibile* 3×3 e sia

$$L_A \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

la corrispondente trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$.
Poiché L_A è lineare e biiettiva, manda rette per l'origine in rette per l'origine:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\},\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad L_A(tX) = tL_A(X), \quad L_A(X) \neq O.$$

Di conseguenza, L_A induce una trasformazione dell'insieme delle direzioni delle rette dello spazio passanti per l'origine

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

Definizione. Una trasformazione proiettiva (proiettività) $F \colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è l'applicazione indotta da una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix}$ *invertibile* 3×3, secondo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{P}^2. \end{tikzcd}$$

In altre parole, se $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 + cx_2 \\ dx_0 + ex_1 + fx_2 \\ gx_0 + hx_1 + ix_2 \end{pmatrix}$, in coordinate omogenee F è data da

$$F((x_0 : x_1 : x_2)) = (ax_0 + bx_1 + cx_2 : dx_0 + ex_1 + fx_2 : gx_0 + hx_1 + ix_2).$$

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La trasformazione proiettiva indotta $F \colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è data dalle formule

$$F(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 + x_1 + x_2 : 2x_1 : x_2).$$

Ad esempio

$$F(1 : 3 : 5) = (9 : 6 : 5), \quad F(2 : 3 : 7) = (12 : 6 : 7), \quad F(1 : 1 : 1) = (3 : 2 : 1).$$

Osservazione. Valgono le stesse considerazioni fatte nel caso di $\mathbb{P}^1$:

- F è ben definita, nel senso che l'immagine di un punto $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ non dipende dalle particolari coordinate omogenee scelte per rappresentarlo.
- Se A è una matrice invertibile, allora tutte le matrici della forma

$$\{\alpha A\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sono invertibili ed inducono la stessa trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^2$.

Osservazione. Anche in questo caso è chiaro dalla definizione che una trasformazione proiettiva è un'applicazione biiettiva di $\mathbb{P}^2$ in sè. Inoltre la composizione di trasformazioni proiettive è una trasformazione proiettiva e che l'inversa di una trasformazione proiettiva è una trasformazione proiettiva.

Il teorema del paragrafo precedente ha la seguente generalizzazione. La dimostrazione è completamente analoga.

Teorema. *Date due quaterne di punti distinti* $P,\ Q,\ R,\ S$ *e* $P',\ Q',\ R',\ S'$ *in* $\mathbb{P}^2$, *a tre a tre non collineari in* $\mathbb{P}^2$, *esiste un'unica trasformazione proiettiva* $f\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ *tale che* $f(P) = P',\ f(Q) = Q',\ f(R) = R',\ f(S) = S'$.

Osservazione. Dal teorema segue che una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^2$ è completamente determinata dall'immagine di quattro punti distinti, a tre a tre non collineari in $\mathbb{P}^2$. Ciò equivale a dire che due proiettività che coincidono su quattro punti distinti, a tre a tre non collineari in $\mathbb{P}^2$, coincidono ovunque.

Esercizio. Verificare che le seguenti quaterne P, Q, R, S e P', Q', R', S' sono formate da punti a tre a tre non collineari. Determinare le proiettività che mandano P, Q, R, S rispettivamente in P', Q', R', S', dove

(a) $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$, $R = (0 : 0 : 1)$, $S = (1 : 1 : 1)$ e $P' = (1 : 1 : 1)$, $Q' = (-1 : 4 : 2)$, $R' = (0 : 6 : 0)$, $S' = (1 : 1 : 0)$.

(b) $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$, $R = (0 : 0 : 1)$, $S = (1 : 1 : 1)$, e $P' = (1 : 2 : 1)$, $Q' = (2 : 5 : 0)$, $R' = (0 : 3 : 1)$, $S' = (1 : 1 : 0)$.