

La retta proiettiva $\mathbb{P}^1$.

Sia $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ il piano privato dell'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Due vettori $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ si dicono *collineari* se appartengono alla stessa retta per l'origine, ossia se sono uno multiplo dell'altro per uno scalare non nullo. La collinearità è una relazione di equivalenza che indichiamo con $\sim$:

$$X \sim Y \quad \text{se} \quad Y = \lambda X, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Fissato $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, la classe di equivalenza di X è formata da tutti i vettori non nulli della retta per l'origine che contiene X

$$[X] = \{Y = \lambda X, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

ossia da tutti i vettori che hanno la stessa direzione di X (non necessariamente lo stesso verso).

Il vettore $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è stato eliminato perché appartiene a tutte le rette per l'origine, dunque non distingue alcuna direzione.

Definizione. La retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ è per definizione l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) / \sim,$$

ossia l'insieme delle classi di equivalenza dei vettori di $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ rispetto alla relazione di collinearità $\sim$. La retta proiettiva è l'insieme delle direzioni delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^2$.

Esempio. Tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

sono collineari ed individuano lo stesso elemento di $\mathbb{P}^1$.

Esempio. Quanti elementi distinti di $\mathbb{P}^1$ individuano i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché i tre vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, i due vettori $\begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$, e i due vettori $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ sono collineari, si trovano 7 elementi distinti in $\mathbb{P}^1$.

Se consideriamo S^1 , il cerchio di centro l'origine e raggio uguale a uno in $\mathbb{R}^2$, abbiamo che ogni retta per l'origine in $\mathbb{R}^2$ incontra S^1 in due punti simmetrici rispetto all'origine. Perciò tutte le classi di equivalenza di $(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) / \sim$ contengono esattamente due vettori di norma uguale a 1 e $\mathbb{P}^1$ è anche l'insieme ottenuto da S^1 identificando i punti antipodali:

$$\mathbb{P}^1 \cong S^1 / \sim.$$

- La proiezione canonica $\pi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ è l'applicazione che ad un vettore X associa la sua direzione. Se $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, la sua immagine in $\mathbb{P}^1$ si indica con

$$\pi(X) = (x_0 : x_1),$$

dove $(x_0 : x_1)$ sono chiamate le *coordinate omogenee* di $\pi(X)$. I due punti “ : ” stanno appunto ad indicare che $\pi(X)$ non è caratterizzata dai valori di x_0 e x_1 , ma dal rapporto fra x_0 e x_1 . Dati $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ si ha infatti che

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad x_0/x_1 = y_0/y_1.$$

Esempio. I tre vettori $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono collineari e dunque $\pi(X) = \pi(Y) = \pi(Z) \in \mathbb{P}^1$. In particolare, $(2 : 1)$, $(4 : 2)$, $(8 : 4)$ sono coordinate omogenee dello stesso elemento di $\mathbb{P}^1$. In generale, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, le coordinate omogenee $(2t : t)$ individuano lo stesso elemento di $\mathbb{P}^1$.

La retta proiettiva si può anche pensare come la “retta reale estesa”, ossia la retta reale alla quale si è aggiunto il punto all'infinito. Questa identificazione si ottiene proiettando la stella di rette per l'origine su una qualunque retta l che non contiene l'origine: ogni retta della stella interseca l esattamente in un punto, ad eccezione della retta parallela ad l che la interseca appunto “all'infinito”.

Osserviamo che

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = A_0 \cup A_1, \quad A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid x_0 \neq 0 \right\}, \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \neq 0 \right\};$$

precisamente, A_0 coincide con $\mathbb{R}^2$ privato della retta verticale $x_0 = 0$, mentre A_1 coincide con $\mathbb{R}^2$ privato della retta orizzontale $x_1 = 0$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0 e A_1 sono date rispettivamente da

$$\pi|_{A_0} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right) = (x_0 : x_1) = (1 : x_1/x_0), \quad \pi|_{A_1} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right) = (x_0 : x_1) = (x_0/x_1 : 1).$$

Le quantità x_0/x_1 e x_1/x_0 sono chiamate anche “coordinate non omogenee” di $\pi(X)$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0 e ad A_1 producono le identificazioni di $\mathbb{P}^1$ con la retta reale estesa associate rispettivamente alla retta verticale di equazione $x_0 = 1$ e alla retta orizzontale di equazione $x_1 = 1$.

Prendiamo ad esempio l uguale alla retta verticale di equazione $x_0 = 1$:

una retta per l'origine non parallela ad l ha equazione $ax_0 + bx_1 = 0$, con $b \neq 0$, ed è formata dai punti di coordinate

$$t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tutti i punti della forma $t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, sono contenuti in A_0 . Questa retta interseca l nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix}$. La coordinata non omogenea di questo punto coincide con il coefficiente angolare della retta. Il punto all'infinito di l corrisponde alla retta verticale $x_0 = 0$, ai cui punti si assegna coordinata non omogenea ∞ .

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$.

Sia $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ lo spazio privato dell'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sui vettori di $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ consideriamo la relazione di equivalenza data dalla collinearità:

$$X \sim Y \quad \text{se} \quad Y = \lambda X, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Fissato $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, la classe di equivalenza di X è formata da tutti i vettori della retta per l'origine che contiene X

$$[X] = \{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

ossia da tutti i vettori che hanno la stessa direzione di X (non necessariamente lo stesso verso).

Definizione. Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ è per definizione l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}) / \sim,$$

ossia l'insieme delle direzioni delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^3$.

Esempio. Tutti i vettori di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -13 \\ -13/2 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

sono collineari e individuano lo stesso elemento di $\mathbb{P}^2$.

Esercizio. Quanti punti distinti di $\mathbb{P}^2$ individuano i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -17 \\ -13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo S^2 , la sfera di centro l'origine e raggio uguale a uno in $\mathbb{R}^3$, abbiamo che ogni retta per l'origine in $\mathbb{R}^3$ incontra S^2 in due punti simmetrici rispetto all'origine. Perciò $\mathbb{P}^2$ si può anche ottenere da S^2 identificando i punti antipodali.

• La proiezione canonica $\pi: \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ è l'applicazione che ad un vettore X associa la sua direzione. Se $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, la sua immagine in $\mathbb{P}^2$ si indica con

$$\pi(X) = (x_0 : x_1 : x_2),$$

dove $(x_0 : x_1 : x_2)$ sono le coordinate omogenee di $\pi(X)$. I due punti “:” in questo caso stanno ad indicare che la classe di equivalenza di $\pi(X)$ non è caratterizzata dai valori di x_0, x_1, x_2 ma dai

rapporti x_0/x_1 e x_1/x_2 . Dati $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ si ha infatti che

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0/x_1 = y_0/y_1 \\ x_1/x_2 = y_1/y_2. \end{cases}$$

Il piano proiettivo si può anche pensare come il “piano esteso”, ossia come il piano al quale si è aggiunta la retta all’infinito. Questa identificazione si ottiene proiettando la stella di rette per l’origine su un piano α che non contiene l’origine: ogni retta della stella interseca α esattamente in un punto, ad eccezione delle rette che giacciono sul piano per l’origine parallelo ad α , che lo intersecano appunto “all’infinito”. Le direzioni di queste rette formano a loro volta un $\mathbb{P}^1$.

Osserviamo che

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{O\} = A_0 \cup A_1 \cup A_2,$$

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_0 \neq 0 \right\}, \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \neq 0 \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \neq 0 \right\};$$

precisamente, A_0 coincide con $\mathbb{R}^3$ privato del piano verticale $x_0 = 0$, A_1 coincide con $\mathbb{R}^3$ privato del piano verticale $x_1 = 0$, mentre A_2 coincide con $\mathbb{R}^3$ privato del piano orizzontale $x_2 = 0$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0 , A_1 e A_2 sono date rispettivamente da

$$\pi|_{A_0} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x_1/x_0 : x_2/x_0),$$

$$\pi|_{A_1} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0/x_1 : 1 : x_2/x_1),$$

$$\pi|_{A_2} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0/x_2 : x_1/x_2 : 1).$$

Le quantità x_i/x_j sono chiamate anche “coordinate non omogenee” di $\pi(X)$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0 , A_1 e A_2 producono le identificazioni di $\mathbb{P}^2$ con il piano esteso associate rispettivamente al piano $x_0 = 1$, al piano $x_1 = 1$ e al piano $x_2 = 1$. Sia ad esempio α il piano verticale di equazione $x_0 = 1$. Una retta per l’origine

$$r : \quad X = t \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

interseca α nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ a_1/a_0 \\ a_2/a_0 \end{pmatrix}$, purché sia $a_0 \neq 0$. Se $a_0 = 0$, la retta r è parallela ad α ed interseca α “all’infinito”. Le direzioni di queste rette

$$X = t \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\},$$

formano a loro volta una retta proiettiva $\mathbb{P}^1$, detta la retta all’infinito di $\mathbb{P}^2$.

Geometria nel piano proiettivo.

Per definizione, i punti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ sono le immagini tramite la proiezione canonica π delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^3$ (private dell'origine).

Le *rette proiettive* sono per definizione le immagini dei piani per l'origine in $\mathbb{R}^3$ (privati dell'origine). Osserviamo che dato un piano α in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine, α contiene la retta per l'origine individuata da ogni suo punto. Di conseguenza, la restrizione della proiezione $\pi|(\alpha \setminus \{O\})$ è ben definita.

Per brevità, spesso diremo che una retta proiettiva r ha equazione

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0,$$

intendendo che la retta r è immagine tramite la proiezione canonica π del piano α di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.

Un altro modo di vedere la retta proiettiva r è il seguente. Scriviamo il piano α in forma parametrica

$$X = tP + sQ, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

dove $P, Q \in \alpha$ sono due vettori linearmente indipendenti. Per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli, il vettore $tP + sQ$ è un vettore non nullo di α (dunque parallelo ad α) e gli scalari s, t sono le coordinate di $tP + sQ$ nella base $\{P, Q\}$ di α . Le coordinate omogenee $(t : s)$ (che dipendono dalla scelta di $\{P, Q\}$) individuano un elemento di $\mathbb{P}^1$. In altre parole, ogni scelta di una base $\{P, Q\}$ in α induce una identificazione di r con $\mathbb{P}^1$.

• Un punto $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in \mathbb{P}^2$ appartiene ad una retta proiettiva r , di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, se il vettore $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (e tutti i suoi multipli non nulli) soddisfano l'equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.

Esempio. L'equazione $2x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$ definisce una retta r in $\mathbb{P}^2$. I punti di coordinate omogenee

$$(3 : -2 : 0), \quad (0 : 1 : -3), \quad (1 : 1 : -5), \quad (2 : 2 : -10), \quad (1 : -1 : 1), \quad (1 : 0 : -2) \quad (*)$$

appartengono tutti ad r . Infatti, le terne

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e tutti i loro multipli non nulli soddisfano l'equazione $2x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$. Quanti punti distinti di r individuano le coordinate proiettive (*)?

• Due rette proiettive distinte si intersecano sempre in un punto:

siano r, l due rette distinte del piano proiettivo. Siano $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ e $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ le equazioni dei corrispondenti piani (distinti) in $\mathbb{R}^3$. L'intersezione $r \cap l$ è l'immagine tramite la proiezione canonica π della retta per l'origine data dall'intersezione di tali piani

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0. \end{cases}$$

La direzione di tale retta è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ b_0 a_2 - a_0 b_2 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix},$$

per cui il punto di intersezione cercato $r \cap l$ ha coordinate omogenee

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1 : b_0 a_2 - a_0 b_2 : a_0 b_1 - a_1 b_0).$$

Esempio. Siano r ed l le rette proiettive corrispondenti rispettivamente ai piani $2x_0 - x_2 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$ in $\mathbb{R}^3$. L'intersezione $r \cap l$ è data dall'immagine tramite π della retta $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

in $\mathbb{R}^3$. Tale retta ha equazione parametrica $X = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ e le coordinate omogenee di $r \cap l$ sono date da $(2 : 1 : 1)$.

• *Per due punti distinti del piano proiettivo passa una e una sola retta:*

Siano P, Q punti distinti in $\mathbb{P}^2$ e siano r ed l le corrispondenti rette (distinte) per l'origine in $\mathbb{R}^3$. Sia α il piano per l'origine (unico) che le contiene. L'immagine tramite π del piano α è la retta proiettiva passante per P e Q . Se le coordinate omogenee di P e Q sono rispettivamente $(a_0 : a_1 : a_2)$ e $(b_0 : b_1 : b_2)$, il piano α ha equazione cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)x_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2)x_1 + (a_0 b_1 - a_1 b_0)x_2 = 0$$

ed equazione parametrica

$$X = tP + sQ, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $t, s \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, il punto di coordinate omogenee

$$(ta_0 + sb_0 : ta_1 + sb_1 : ta_2 + sb_2)$$

è un punto della retta proiettiva per P e Q .

Esempio. Siano dati punti $P = (1 : 2 : 1)$ e $Q = (1 : 1 : 3)$ del piano proiettivo (sono distinti perché i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ non sono collineari). Il piano di $\mathbb{R}^3$ che contiene le rette individuate

da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana $5x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$. La retta proiettiva passante per

P e Q è data dall'immagine di tale piano tramite π . Lo stesso piano ha equazione parametrica $X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$. Per ogni t, s non entrambi nulli, il punto di coordinate omogenee $(t + s : 2t + s : t + 3s)$ appartiene alla retta proiettiva per P e Q .

Appendice: Relazioni d'equivalenza.

Sia X un insieme. Una relazione binaria $\sim$ su X (cioè che riguarda coppie di elementi di X) si dice una relazione di equivalenza se è riflessiva ($x \sim x$), simmetrica ($x \sim y$ implica $y \sim x$) e transitiva ($x \sim y$ e $y \sim z$ implica $x \sim z$). La classe di equivalenza di un elemento x , rispetto a $\sim$, è data da $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Le classi di equivalenza rispetto a $\sim$ definiscono una partizione di X , nel senso che X si decompone nell'unione disgiunta delle sue classi di equivalenza: $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ se e solo se $x \sim y$, ed in tal caso $[x] = [y]$.

Dato un insieme X con una relazione di equivalenza, sia Q l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza di X . L'insieme Q si dice anche l'*insieme quoziente* di X rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$

$$Q = X / \sim .$$

Si chiama *proiezione canonica* $\pi: X \rightarrow Q$ l'applicazione che associa ad un elemento $x \in X$ la sua classe di equivalenza $\pi(x) = [x]$ in Q .

Esempio. X l'insieme delle persone,
 $\sim$ essere connazionali,
 Q l'insieme degli stati,
 $\pi(\text{persona}) = \text{nazione}$.

Esempio. $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$,
 $(m, n) \sim (p, q)$ se $m/n = p/q$,
 $Q = \mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali,
 $\pi(m, n) = m/n$.