4. Isometrie di $\mathbf{R}^3$.

In questo paragrafo studiamo le isometrie dello spazio $\mathbf{R}^3$. Analogamente a quanto abbiamo fatto nel piano, definiamo innanzitutto l'orientazione di una terna di vettori nello spazio.

Definizione. *L'orientazione* $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})$ di tre vettori $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^3$ è il segno del determinante

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Si dice che $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ sono orientati *positivamente* se $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})>0$.

Per esempio, i vettori $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sono orientati positivamente perchè

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1.$$

Scambiare due vettori cambia il segno dell'orientazione:

$$\mathrm{Or}(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z})=-\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Geometricamente, tre vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono orientati positivamente se possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano destra. Altrimenti sono orientati negativamente e possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano sinistra.

Mano sinistra; $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=-1$. Mano destra; $\mathrm{Or}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=+1$.

Fig.1. L'orientazione.

Introduciamo adesso alcune isometrie di particolare significato geometrico.

Definizione. Sia $\mathbf{p}$ un vettore di $\mathbf{R}^3$. La *traslazione* $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p}$ è l'applicazione $T_{\mathbf{p}}:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+p_1 \\ x_2+p_2 \\ x_3+p_3 \end{pmatrix}.$$

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 4.1.
(i) *Siano* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^3$. *Allora* $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$. *In particolare, la composizione di due traslazioni è una traslazione.*
(ii) *La traslazione* $T_{\mathbf{0}}$ *è l'applicazione identica.*
(iii) *La traslazione* $T_{-\mathbf{p}}$ *è l'inversa di* $T_{\mathbf{p}}$, *ossia* $T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}} = (T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}) = T_{\mathbf{0}}$ *è l'applicazione identica.*

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella della Prop.3.1 ed è lasciata al lettore.

Fig.2. La traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

Introduciamo adesso le *rotazioni* e le riflessioni in $\mathbf{R}^3$. La teoria è un po' più complicata di quella in $\mathbf{R}^2$. Cominciamo con le rotazioni e le riflessioni in forma standard e poi trattiamo il caso generale.

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_\varphi: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ associa il vettore $\mathbf{x}$ ruotato di un angolo φ intorno al vettore $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $\varphi > 0$, la rotazione indotta sul piano (x_2, x_3) va intesa in senso antiorario (vedi Sez. 3). Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

Fig.3. La rotazione R_φ.

Teorema 4.2. *Sia* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ *e sia* $\varphi \in \mathbf{R}$. *Le coordinate del punto* $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ *sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \cos(\varphi)x_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x_3, \\ y_3 &= \operatorname{sen}(\varphi)x_2 + \cos(\varphi)x_3. \end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Questa formula segue dalla formula del Teorema 3.2 per la rotazione R_φ in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$ e angolo φ.

Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ in $\mathbf{R}^3$ è data da

$$R_{\pi/4}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

Esempio 4.3. Come ottenere le formule della *rotazione di un angolo φ intorno ad una retta arbitraria l che passa per* $\mathbf{0}$? Inanzitutto, notiamo che il problema non è ben posto se la retta non è orientata: non è chiaro infatti in quale direzione si deve fare la rotazione nel piano ortogonale ad l. Se la retta è orientata, fissiamo un vettore $\mathbf{v}$ lunghezza 1 con direzione e verso uguali a quelli della retta l. Scegliamo poi due vettori $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$ di lunghezza 1, in modo che $\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{v},\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$ sia una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente. I vettori $\mathbf{e}'_2$ e $\mathbf{e}'_3$ con queste proprietà possono essere scelti in infiniti modi. Parleremo quindi di *rotazione di un angolo φ intorno al vettore* $\mathbf{v}$ se nel piano $l^\perp$ il verso di rotazione è quello antiorario rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$.

Un metodo naturale per ottenere le formule della rotazione $R_{\varphi,\mathbf{v}}$, di un angolo φ intorno ad una vettore $\mathbf{v}$ diverso da $\mathbf{e}_1$, è il seguente. Siano $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ le coordinate di un generico vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$ costruita sopra. Per il teorema 4.2, rispetto a questa base, la rotazione è data da

$$R_{\varphi,\mathbf{v}}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cos(\varphi)x'_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x'_3 \\ \operatorname{sen}(\varphi)x'_2 + \cos(\varphi)x'_3 \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

dove

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

è la matrice rappresentativa corrispondente. Sia M la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; le colonne di M sono i vettori della base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ espressi nella base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. La matrice rappresentativa $A_{\varphi,\mathbf{v}}$ di $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica è data dunque da

$$A_{\varphi,\mathbf{v}} = MA'_{\varphi,\mathbf{v}}M^{-1}.$$

Esempio. Calcoliamo le formule della rotazione di un angolo $\pi/4$ intorno al vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale per $\mathbf{R}^3$, orientata positivamente. La matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/4}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ è data da

$$A'_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice M del cambiamento di base $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\} \to \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice rappresentativa $A_{\pi/4}$ della rotazione rispetto alla base canonica è quindi data da

$$A_{\pi/4} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Definizione. Sia $S : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano di equazione $x_3 = 0$. Abbiamo

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

ed in forma matriciale,

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fig.4. La riflessione S rispetto al piano $x_3 = 0$.

Osservazione. La riflessione rispetto ad una retta l è un particolare tipo di rotazione, precisamente la rotazione di un angolo di 180 gradi intorno alla retta stessa. In questo caso, il risultato non dipende dall'orientazione di l.

Definizione. La riflessione $U_{\mathbf{0}}$ rispetto all'origine $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$ è data dalla formula

$$U_{\mathbf{0}}\mathbf{x} = -I_3\ \mathbf{x} = -\mathbf{x},$$

oppure, in notazione matriciale, da

$$U_{\mathbf{0}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fig.5. La riflessione $U_{\mathbf{0}}$ rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

Esempio 4.4. Come calcolare le formule della *rotazione R di un angolo φ rispetto ad una retta orientata l che non passa per l'origine*? La strategia è di traslare la retta l nell'origine, di ruotare di un angolo φ intorno ad un vettore $\mathbf{v}$ con direzione e verso uguali ad l, e di ritraslare infine la retta "dov'era".

Esempio. Calcoliamo ad esempio la rotazione di un angolo $\pi/3$ rispetto alla retta l di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cominciamo con una traslazione che porta l in una retta per l'origine $\mathbf{0}$. Per esempio la traslazione $T_{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}$ di passo $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta m, parallela ad l e passante per l'origine. La retta m ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e coincide con l'asse delle x_2. Fissiamo il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ paralello ad m e con lo stesso verso di m. Rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$, orientata positivamente, la matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/3}$ è data da

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa della rotazione intorno a $\mathbf{v}$ risulta

$$R_{\pi/3,\mathbf{v}} = M R_{\pi/3} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad l sono quindi

$$R = T_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)} R_{\pi/3,\mathbf{v}} T_{\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)}$$

ossia

$$R\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\\x_3\end{pmatrix}.$$

Supponiamo adesso che la retta l, e quindi la retta m, abbia l'orientazione opposta. Il vettore $\mathbf{v}' = -\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ ha la direzione e il verso di m. In questo caso, la base $\mathcal{B}'' = \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ è ortonormale ed orientata positivamente ed il cambiamento di base da $\mathcal{B}''$ alla base canonica è dato dalla matrice

$$N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}''$ la matrice rappresentativa della rotazione è ancora $R_{\pi/3}$, ma rispetto alla base canonica troviamo adesso la matrice

$$R_{\pi/3,\mathbf{v}'} = NR_{\pi/3}N^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad l risultano quindi

$$R'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\\x_3\end{pmatrix}.$$

Esempio 4.5. (*riflessione rispetto ad un piano arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula per la riflessione S_π rispetto ad un piano arbitrario π. Sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ un punto generico. La retta $r_\mathbf{p}$ che passa per $\mathbf{p}$ ed è perpendicolare a π interseca π in un punto $\mathbf{q}$ che è il punto medio fra $\mathbf{p}$ e $S_\pi(\mathbf{p})$

$$\mathbf{q} = r_\mathbf{p} \cap \pi = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + S_\pi(\mathbf{p})), \quad \text{da cui} \quad S_\pi(\mathbf{p}) = 2\mathbf{q} - \mathbf{p}.$$

Esempio. Sia π il piano di equazione $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$. Sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario. La retta $r_\mathbf{p}$ che passa per $\mathbf{p}$ ed è perpendicolare a π è data da

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione $r_\mathbf{p} \cap \pi$ è un punto $\mathbf{q}$ che corrisponde al valore del parametro

$$t_0 = \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}.$$

Siccome $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$, il punto $S_\pi(\mathbf{p})$, simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a π, corrisponde a $t = 2t_0$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_\pi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2t_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2\frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fig.6. La riflessione S_π rispetto al piano π.

Esempio 4.6. (*riflessione rispetto ad un punto arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula della riflessione $U_\mathbf{p}$ rispetto ad un punto arbitrario $\mathbf{p}$.
Il centro di riflessione $\mathbf{p}$ è il punto medio fra un punto generico $\mathbf{x}$ e il suo simmetrico $U_\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Di conseguenza,

$$\mathbf{p} = 1/2(\mathbf{x} + U_\mathbf{p}(\mathbf{x})) \quad \text{e} \quad U_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2p_1 - x_1 \\ 2p_2 - x_2 \\ 2p_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Un altro modo per ottenere le stesse formule è quello di traslare il punto $\mathbf{p}$ nell'origine $\mathbf{0}$, effettuare la riflessione $U_\mathbf{0}$ rispetto all'origine e poi ritraslare l'origine in $\mathbf{p}$, ossia

$$U_\mathbf{p} = T_\mathbf{p} \circ U_\mathbf{0} \circ T_{-\mathbf{p}} \qquad U_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2p_1 \\ -x_2 + 2p_2 \\ -x_3 + 2p_3 \end{pmatrix}.$$

Esempio. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario. Allora il punto simmetrico di $\mathbf{x}$ rispetto a $\mathbf{p}$ è dato da

$$U_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \\ 4 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Osservazione.
• La rotazione $R_{l,\phi}$ di un angolo ϕ intorno ad una retta (orientata) l è lineare se e soltanto se l passa per l'origine $\mathbf{0}$. Se l non passa per l'origine, $R_{l,\phi}$ è una applicazione lineare seguita da una traslazione. Allo stesso modo, la riflessione S_π rispetto ad un piano π è lineare se e soltanto se π passa per l'origine $\mathbf{0}$. Se

π non passa per l'origine $\mathbf{0}$, la riflessione S_π è una applicazione lineare seguita da una traslazione. Infine la simmetria rispetto ad un punto $\mathbf{p}$ è lineare se e soltanto se $\mathbf{p}$ coincide con l'origine $\mathbf{0}$. Altrimenti è una applicazione lineare seguita da una traslazione.

• Per una matrice ortogonale M, vale $\det M = \pm 1$. Si può dimostrare che una matrice ortogonale 3×3 con determinante uguale a 1 è la matrice di una rotazione intorno ad una retta (orientata) passante per l'origine, e che una matrice ortogonale 3×3 con determinante uguale a -1 è la matrice di una rotazione intorno ad una retta per l'origine seguita da una riflessione rispetto ad un piano per l'origine. Questo significa che le rotazioni intorno ad una retta per l'origine e le rotazioni intorno ad una retta per l'origine seguite da una riflessione rispetto ad un piano per l'origine esauriscono tutte le isometrie lineari di $\mathbf{R}^3$. Per il Corollario 2.6, tutte e sole le isometrie di $\mathbf{R}^3$ sono date dalla composizione di una traslazione con una rotazione intorno ad una retta (orientata) per l'origine oppure da una traslazione composta con una riflessione rispetto ad un piano per l'origine composta con una rotazione intorno ad una retta (orientata) per l'origine.

Sia M una matrice ortogonale 3×3. Si ha che $\det M = \pm 1$ ((cfr. Esercizio 2.4(ii)). Inoltre, essendo una matrice reale di ordine dispari, M ha almeno un autovalore reale $\lambda_0 = \pm 1$ (cfr. Esercizio 2.4(iii)).

Esaminiamo i vari casi:

(1.a) Siano $\det M = 1$ e $\lambda_0 = 1$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente, con $\mathbf{x}_1$ autovettore di autovalore 1. In questa base, la matrice dell'isometria definita da M è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale 2×2 con determinante uguale a 1. Ne segue che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ed M rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno al vettore $\mathbf{x}_1$.

(1.b) Siano $\det M = 1$ e $\lambda_0 = -1$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente, con $\mathbf{x}_1$ autovettore di autovalore -1. In questa base, la matrice dell'isometria definita da M è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

dove $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale 2×2 con determinante uguale a -1. Ne segue che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ e che i rimanenti autovalori di M sono $\mu = 1$, $\nu = -1$. Se nella base $\mathcal{B}$ i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sono autovettori di autovalore -1 e $\mathbf{x}_3$ è autovettore di autovalore 1, la matrice dell'isometria definita da M è precisamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

In questo caso, M rappresenta la rotazione di un angolo $\theta = \pi$ intorno al vettore $\mathbf{x}_3$. La discussione dei punti (1.a) e (1.b) dimostra quindi che una matrice ortogonale con determinante uguale a 1 rappresenta una rotazione.

(2) Se $\det M = -1$, scriviamo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M, \qquad \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot M\right) = 1.$$

Ricordiamo che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rappresenta la simmetria rispetto al piano (x_1, x_2). Questo fatto insieme alla discussione dei punti (1.a) e (1.b) dimostra che una matrice ortogonale con determinante uguale a -1 rappresenta la composizione di una simmetria con una rotazione.

• Analogamente al caso delle isometrie del piano, vale il seguente teorema per le isometrie dello spazio

Teorema. *Ogni isometria dello spazio è composizione di n riflessioni (rispetto a piani), con $n \leq 4$.*

Osservazione. Tutte le trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^3$ mandano rette in rette e piani in piani. Lo stesso vale per le traslazioni e dunque vale per le isometrie dello spazio che sono composizioni di trasformazioni lineari e traslazioni.

Se M è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di $\mathbf{R}^3$ ed r è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R},$$

la retta immagine di R tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se π è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

il piano immagine di π tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se $T_{\mathbf{q}}$ è una traslazione di passo $\mathbf{q}$ in $\mathbf{R}^3$, l'immagine di r tramite $T_{\mathbf{q}}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R};$$

l'immagine di π tramite $T_{\mathbf{q}}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Osservazione. Per concludere osserviamo che, in generale, una trasformazione lineare f di $\mathbf{R}^3$ preserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$. Le rotazioni $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ preservano l'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^3$ poiché le loro matrici rappresentative hanno sempre determinante uguale a 1. Le riflessioni S ed U invece cambiano l'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^3$ poiché le loro matrici rappresentative hanno determinante uguale a -1.