5. Isometrie: generalità.

Dimostriamo ora alcune proprietà delle isometrie del piano $\mathbb{R}^2$ che si generalizzano alle isometrie dello spazio $\mathbb{R}^3$ e alle isometrie di $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \geq 1$.

Proposizione 5.1. *Un'isometria del piano che fissa 3 punti* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ *non allineati è necessariamente l'identità.*

Dimostrazione. Possiamo ricondurci al caso in cui uno dei punti coincide con l'origine $\mathbf{o}$. Infatti, se $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, $F(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$, $F(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, l'isometria $G = T_{-\mathbf{p}} \circ F \circ T_{\mathbf{p}}$ soddisfa

$$G(\mathbf{o}) = \mathbf{o}, \quad G(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{q}-\mathbf{p}, \quad G(\mathbf{r}-\mathbf{p}) = \mathbf{r}-\mathbf{p},$$

ossia fissa i tre punti non allineati $\mathbf{o}$, $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}-\mathbf{p}$. Inoltre, F è l'identità se e solo se G è l'identità. Per la Proposizione 2.2, l'isometria G è lineare. Poiché un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che fissa due vettori linearmente indipendenti è necessariamente l'identità, segue che G è l'identità ed F è l'identità, come richiesto.

A partire da questo fatto si dimostra il seguente teorema, già citato nella sezione 2.

Teorema 5.2. *Ogni isometria del piano è composizione di* n *riflessioni, con* $n \leq 3$.

Dimostrazione. Sia $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'isometria. Se $F \equiv Id$ la tesi è dimostrata per $n = 0$. Se $F \not\equiv Id$, esiste un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$. Sia r l'asse del segmento $\overline{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ (la retta dei punti equidistanti da $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$) e sia S_r la riflessione rispetto ad r. Si verifica facilmente che la composizione $G = S_r \circ F$ è un'isometria che fissa $\mathbf{p}$, ossia $G(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Se $G \equiv Id$, allora $F = S_r$ e la tesi è dimostrata per $n = 1$. Se $G \not\equiv Id$, allora esiste $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ tale che $G(\mathbf{q}) = \mathbf{q}' \neq \mathbf{q}$. Sia s l'asse del segmento $\overline{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ e sia S_s la riflessione rispetto ad s. Si verifica facilmente che la composizione $H = S_s \circ G = S_s \circ S_r \circ F$ è un'isometria che fissa $\mathbf{q}$, ossia $H(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$. Osserviamo inoltre che il punto $\mathbf{p}$ appartiene alla retta s, poiché

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = d(G(\mathbf{p}),G(\mathbf{q})) = d(\mathbf{p},\mathbf{q}').$$

Di conseguenza $H(\mathbf{p}) = S_s(G(\mathbf{p})) = S_s(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ e l'isometria H fissa anche $\mathbf{p}$. Se $H \equiv Id$, si ha che $F = S_r \circ S_s$ e la tesi è dimostrata per $n = 2$. Se $H \not\equiv Id$, esiste $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$. Sia t l'asse del segmento $\overline{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$. Osserviamo che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ appartengono a t, poiché

$$d(\mathbf{p},\mathbf{r}) = d(H(\mathbf{p}),H(\mathbf{r})) = d(\mathbf{p},\mathbf{r}') \quad \text{e} \quad d(\mathbf{q},\mathbf{r}) = d(H(\mathbf{q}),H(\mathbf{r})) = d(\mathbf{q},\mathbf{r}').$$

Se S_t è la riflessione rispetto ad t, la composizione $L = S_t \circ H$ è un'isometria che fissa tre punti non allineati

$$L(\mathbf{p}) = \mathbf{p}, \quad L(\mathbf{q}) = \mathbf{q}, \quad L(\mathbf{r}) = \mathbf{r}.$$

Per la Proposizione 5.1, L è l'identità, $F = S_r \circ S_s \circ S_t$ e la tesi è dimostrata per $n = 3$.

Osservazione. Nel corso della dimostrazione della Proposizione 5.1 e del teorema precedente abbiamo trovato in particolare che

(i) Un'isometria con tre punti fissi $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ non allineati è l'identità.

(ii) Un'isometria con due punti fissi $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ è composizione di al piú una riflessione: è la riflessione rispetto alla retta per $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

(iii) Un'isometria con un punto fisso $\mathbf{p}$ è composizione di al piú due riflessioni.

(iv) Un'isometria senza punti fissi è composizione di al piú tre riflessioni.

Proposizione 5.3.
(i) Dati due punti del piano $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *esiste un'isometria che manda* $\mathbf{p}$ *in* $\mathbf{q}$.
(ii) Date due coppie di punti del piano $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ *e* $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, *esiste un'isometria che manda* $\mathbf{p}_1$ *in* $\mathbf{q}_1$ *e* $\mathbf{p}_2$ *in* $\mathbf{q}_2$ *se e solo se* $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$.

Dimostrazione. (i) Basta prendere la traslazione $T_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}$.
(ii) Se esiste un'isometria che manda $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{q}_2$, allora necessariamente $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. Viceversa, supponiamo che valga $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. La traslazione $T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}$ manda $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{q}_1$ e manda $\mathbf{p}_2$ nel punto $\mathbf{p}_2' = T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_2)$. Se $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2'$ la proposizione è dimostrata. Se $\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{p}_2'$, osserviamo che $d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2')$, per cui esiste una rotazione $R_{\mathbf{q}_1,\theta}$ di centro $\mathbf{q}_1$ che manda $\mathbf{p}_2'$ in $\mathbf{q}_2$. La composizione $R_{\mathbf{q}_1,\theta} \circ T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}$ è un'isometria che soddisfa le condizioni richieste.

Nel caso delle isometrie dello spazio $\mathbb{R}^3$, con un ragionamento analogo a quello usato nella Proposizione 5.1 si può dimostrare che

Proposizione. *Un'isometria dello spazio che fissa 4 punti non complanari è necessariamente l'identità.*

Con una dimostrazione del tutto simile a quella del Teorema 5.2 (con un passaggio in più per arrivare all'identità), si ottiene

Teorema. *Ogni isometria dello spazio è composizione di* m *riflessioni (rispetto a piani), con* $m \leq 4$.

Nel caso delle isometrie dello spazio $\mathbb{R}^3$, la Proposizione 5.3 si generalizza nel modo seguente.

Proposizione.
(i) Dati due punti dello spazio $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *esiste un'isometria che manda* $\mathbf{p}$ *in* $\mathbf{q}$.
(ii) Date due coppie di punti dello spazio $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ *e* $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, *esiste un'isometria che manda* $\mathbf{p}_1$ *in* $\mathbf{q}_1$ *e* $\mathbf{p}_2$ *in* $\mathbf{q}_2$ *se e solo se* $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$.
(iii) Date due triple di punti dello spazio $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ *e* $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ *esiste un'isometria che manda* $\mathbf{p}_1$ *in* $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2$ *in* $\mathbf{q}_2$, *e* $\mathbf{p}_3$ *in* $\mathbf{q}_3$ *se e solo se* $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, $d(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = d(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ *e* $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)$.

Dimostrazione. (i) Basta prendere la traslazione $T_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}$.
(ii) Se esiste un'isometria che manda $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{q}_2$, allora necessariamente $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. Viceversa, supponiamo che valga $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. La traslazione $T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}$ manda $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{q}_1$ e manda $\mathbf{p}_2$ nel punto $\mathbf{p}_2' = T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_2)$. Se $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_2'$ la proposizione è dimostrata. Se $\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{p}_2'$, esiste un unico piano π che contiene $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ e $\mathbf{p}_2'$. Poiché $d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2')$, esiste una rotazione R intorno alla retta perpendicolare a π e passante per il punto $\mathbf{q}_1$ che manda $\mathbf{p}_2'$ in $\mathbf{q}_2$. La composizione $R \circ T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}$ è un'isometria che soddisfa le condizioni richieste.
(iii) Se esiste un'isometria che manda $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{q}_2$, e $\mathbf{p}_3$ in $\mathbf{q}_3$ allora necessariamente $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, $d(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = d(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ e $d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) = d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)$. Viceversa, supponiamo che valgano le uguaglianze suddette. Per quanto dimostrato in (ii), esiste una isometria F che manda $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{q}_2$. Se $F(\mathbf{p}_3) = \mathbf{p}_3' = \mathbf{q}_3$, la proposizione è dimostrata. Se $\mathbf{q}_3 \neq \mathbf{p}_3'$, osserviamo che $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ stanno sull'asse del segmento $\overline{\mathbf{p}_3'\mathbf{q}_3}$ (il piano dei punti equidistanti da $\mathbf{q}_3$ e $\mathbf{p}_3'$). La simmetria S rispetto a questo piano manda $\mathbf{p}_3'$ in $\mathbf{q}_3$ e la composizione $S \circ T_{\mathbf{q}_1-\mathbf{p}_1}$ è un'isometria che soddisfa le condizioni richieste.

I metodi usati per il piano e per lo spazio si generalizzano al caso di $\mathbb{R}^n$ e risultati analoghi valgono per le isometrie di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione. *Un'isometria di* $\mathbb{R}^n$ *che fissa* $n+1$ *punti, non contenuti in un sottospazio di dimensione* $n-1$, *è necessariamente l'identità.*

Teorema. *Ogni isometria di* $\mathbb{R}^n$ *è composizione di* m *riflessioni (rispetto a sottospazi di dimensione* $n-1$*), con* $m \leq n+1$.

Proposizione. *Date due ennuple di punti* $\mathbf{p}_1, \ldots \mathbf{p}_n$ *e* $\mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_n$ *in* $\mathbb{R}^n$, *esiste un'isometria che manda* $\mathbf{p}_1$ *in* $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{p}_2$ *in* $\mathbf{q}_2$, ... $\mathbf{p}_n$ *in* $\mathbf{q}_n$ *se e solo se* $d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = d(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$, *per ogni* $1 \leq i \neq j \leq n$.