

**Diagonalizzazione delle matrici simmetriche reali mediante matrici ortogonali.**

Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  simmetrica:  ${}^tA = A$ . La matrice  $A$  gode delle seguenti proprietà [Apostol, Calcolo, Vol.2, Cap.7]:

- (i)  $A$  ha  $n$  autovalori reali, contati con la loro molteplicità. In altre parole, tutte le radici del polinomio caratteristico di  $A$  sono reali.
- (ii) Se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  con molteplicità algebrica  $k$ , allora l'autospazio corrispondente  $V_\lambda$  ha dimensione  $k$ .
- (iii) Autospaзи relativi ad autovalori  $i$  distinti sono ortogonali.

Dai fatti (i)(ii)(iii) segue che

- (iv) Esiste una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  formata da autovettori di  $A$ .
- (v)  $A$  è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale: esiste una matrice  $M$  ortogonale  $n \times n$  tale che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (*)$$

dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori di  $A$ . Infatti, se

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  formata da autovettori di  $A$ , la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

soddisfa (\*).

**Forme quadratiche reali.**

**Definizione.** Una forma quadratica reale in  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$  è un polinomio omogeneo di secondo grado a coefficienti reali

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Posto  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , il modo più conveniente di scrivere una forma quadratica  $F$  è come prodotto

$$F(X) = {}^tXAX,$$

dove  $A$  è la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

definita dalle relazioni

$$a_{ii} = \text{coeff}(x_i^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{ij} = a_{ji} = \text{coeff}(x_i x_j)/2, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

**Esempio.** Una forma quadratica in due variabili è ad esempio  $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$ .

La matrice simmetrica ad essa associata è  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Una forma quadratica in tre variabili è ad esempio  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 2x_1x_3$ .

La matrice simmetrica ad essa associata è  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Sia  $M$  una matrice invertibile  $n \times n$  e sia

$$X = MY \tag{**}$$

il corrispondente cambiamento di coordinate in  $\mathbb{R}^n$ . Se sostituiamo la relazione (\*\*) nell'espressione della forma quadratica  $F(X) = {}^t X A X$  troviamo

$$F(X) = {}^t X A X = {}^t (MY) A (MY) = {}^t Y ({}^t M A M) Y.$$

Ciò significa che nelle coordinate  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  la matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$${}^t M A M.$$

Se il cambiamento di coordinate è dato da una matrice  $M$  ortogonale (caratterizzata dalla relazione  ${}^t M M = I_n$ ), le matrici simmetriche  $A$  e  ${}^t M A M$  sono coniugate:

$${}^t M A M = M^{-1} A M.$$

Questa osservazione e i risultati della sezione precedente ci permettono di concludere quanto segue:

**Proposizione.** Sia  $F(X) = {}^t X A X$  una forma quadratica reale, associata alla matrice simmetrica  $A$ . Esiste un cambiamento di coordinate  $X = MY$ , dato da una matrice ortogonale  $M$ , che trasforma  $F$  in una forma quadratica senza termini misti nelle coordinate  $Y$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Inoltre i coefficienti dei termini quadratici  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori di  $A$ .

- Le coordinate  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  sono indotte in  $\mathbb{R}^n$  da una base ortonormale di autovettori di  $A$ .

**Osservazione.** Le forme quadratiche si distinguono a seconda del segno che assumono al variare di  $X \in \mathbb{R}^n$ .

- Una forma quadratica  $F$  si dice *definita positiva* se  $F(X) > 0$ , per ogni  $X \neq O$ .
- Una forma quadratica  $F$  si dice *semidefinita positiva* se  $F(X) \geq 0$ , per ogni  $X \neq O$ .
- Una forma quadratica  $F$  si dice *definita negativa* se  $F(X) < 0$ , per ogni  $X \neq O$ .
- Una forma quadratica  $F$  si dice *semidefinita negativa* se  $F(X) \leq 0$ , per ogni  $X \neq O$ .
- Una forma quadratica  $F$  si dice *indefinita* se assume sia valori positivi che valori negativi, al variare di  $X \neq O$ .

Il risultato della proposizione caratterizza le forme quadratiche in termini degli autovalori della matrice simmetrica  $A$  associata:

- Una forma quadratica  $F$  è *definita positiva* se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono positivi.
- Una forma quadratica  $F$  si dice *semidefinita positiva* se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono non negativi.
- Una forma quadratica  $F$  si dice *definita negativa* se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono negativi.
- Una forma quadratica  $F$  si dice *semidefinita negativa* se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono non positivi.
- Una forma quadratica  $F$  si dice *indefinita* se e solo se  $A$  ha sia autovalori positivi che negativi.

- Dalla classificazione delle forme quadratiche in due variabili segue la classificazione delle coniche piane, dalla classificazione delle forme quadratiche in tre variabili segue la classificazione delle quadriche dello spazio.

- La forma quadratica associata all'Hessiano di una funzione in un punto critico determina la natura del punto critico stesso: si tratta di un minimo locale se la forma quadratica è definita positiva, di un massimo locale se la forma quadratica è definita negativa, né di un massimo né di un minimo se la forma è indefinita.