

1. Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  una matrice reale simmetrica  $2 \times 2$ .
  - (i) Dimostrare che il polinomio caratteristico di  $A$  è uguale a  $X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$ .
  - (ii) Dimostrare che gli autovalori di  $A$  sono reali.
  - (iii) Dimostrare che esiste una base ortonormale di  $\mathbf{R}^2$  formata da autovettori di  $A$ .
2. Fare un disegno delle seguenti coniche:
  - (i)  $X^2 + 2Y^2 = 5$ .
  - (ii)  $XY = 4$ .
  - (iii)  $X^2 - 4X + Y^2 - 6Y = 3$ .
3. Fare un disegno delle seguenti coniche:
  - (i)  $X^2 + 2Y^2 = 0$ .
  - (ii)  $XY - 2X + Y = 2$ .
  - (iii)  $X^2 - 4X - Y^2 - 6Y + 13 = 0$ .
4. Fare un disegno delle seguenti ellissi. Indicarne centro e assi di simmetria.
  - (i)  $X^2 + 4Y^2 = 5$
  - (ii)  $X^2 + XY + Y^2 = 3$ .
  - (iii)  $2X^2 + 4XY + 5Y^2 + 4X + 13Y - 1/4 = 0$ .
5. Fare un disegno delle seguenti iperboli. Indicarne gli asintoti.
  - (i)  $XY = -4$
  - (ii)  $X^2 - 7Y^2 = 7$ .
  - (iii)  $X^2 + XY - 2Y^2 - 2X - 2Y = 0$ .
6. Fare un disegno delle seguenti coniche.
  - (i)  $X^2 + Y^2 + 2X + 2Y + 1 = 0$
  - (ii)  $X^2 - Y^2 - 2X + 1 = 0$ .
  - (iii)  $Y^2 + 2X + 2Y + 2 = 0$ .
  - (iv)  $X^2 + Y = 4X - 4$ .
  - (v)  $3X^2 - 2XY + 3Y^2 - 10X + 6Y + 8 = 0$ .
  - (vi)  $X^2 + 2XY + Y^2 - 4X + 5 = 0$ .
7. Sia  $C$  la conica data dall'equazione  $Y^2 = X$ .
  - (i) Determinare l'equazione della conica dopo la traslazione di passo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Sia  $C'$  la conica traslata.  
Far vedere che il punto  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  appartiene a  $C'$ .
  - (ii) Determinare l'equazione della conica  $C'$  dopo una rotazione di 60 gradi intorno all'origine. Far vedere che l'immagine del punto  $P$  è  $\begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 + 1 \end{pmatrix}$ .
8. Sia  $C$  la conica data dall'equazione  $X^2 - 2Y^2 = 0$ . Disegnare  $C$ .
  - (i) Determinare l'equazione della conica dopo la traslazione di passo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
9. Sia  $C$  la conica data dall'equazione  $Y^2 = 3XY$ . Disegnare  $C$ .
  - (i) Determinare l'equazione della conica dopo una rotazione di 45 gradi intorno all'origine.
10. (i) Far vedere che i punti  $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  appartengono all'iperbole data da  $Y^2 - 7X^2 = 1$ . Trovare altri punti sull'iperbole con coordinate intere.
  - (ii) Trovare punti  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  con coordinate intere e positive sull'iperbole

$$Y^2 - 19X^2 = 1.$$